Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -x^2 - \frac{6}{x^2}$ _____

2) $f(x) = -2\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^4 (x^2 - 4)\,dx =$ _____

2) $\int_2^3 (4x + 2)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1\,|\,-6)$, $P_2(0\,|\,0)$, $P_3(3\,|\,-6)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le 2{,}04)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(3 \mid -4 \mid 6) \cdot (6 \mid -5 \mid 5) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^3 - 3a \cdot x^2 - 1$ mit $a > 0$. Tipp: Der Parameter a ist eine feste Zahl, die Du nur nicht kennst – leite ab wie gewohnt. Für die Ortskurve stellst Du $x_T = \ldots$ nach a um und setzt in y_T ein.

1) x-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

2) y-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

3) Gleichung der Ortskurve aller Tiefpunkte (3 P.) _____

4) Für welches a liegt der Tiefpunkt auf der Höhe $y = -33$? (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 8-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}2$. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 3)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(12|0|0), B(0|12|0) und C(0|0|8) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(6|3|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -2x + \frac{12}{x^3}$

2) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{5}x^2$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^4 (x^2 - 4)dx = \frac{32}{3}$

2) $\int_2^3 (4x + 2)dx = 12$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 + 4x$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le 2{,}04) = \Phi(2{,}04) \approx 0{,}9793$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(3 \mid -4 \mid 6) \cdot (6 \mid -5 \mid 5) = 68$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $f_a'(x) = 3x^2 - 6a\,x = 3x(x - 2a) = 0, \quad f_a''(2a) = 6a > 0 \Rightarrow x_T = 2a$

2) $f_a(2a) = 8a^3 - 12a^3 - 1 = -4a^3 - 1$

3) $x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \Rightarrow y = -4\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 1 = -\frac{1}{2}x^3 - 1$

4) $-4a^3 - 1 = -33 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^5 \approx 0{,}1468$

2) $E(X) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$

3) $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^8 \approx 0{,}8322$

4) $1 - 0{,}8^m \ge 0{,}9 \Rightarrow m \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}319 \Rightarrow m = 11$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 96 \\ 96 \\ 144 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{39168} \approx 98{,}95\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{144}{\sqrt{39168}} \Rightarrow \alpha \approx 43{,}31^\circ$

3) $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{8} = 1$ mit $x = 6,\ y = 3 \Rightarrow S(6 \mid 3 \mid 2)$

4) $d = \frac{|96 \cdot 0 + 96 \cdot 0 + 144 \cdot 0 - 1152|}{\sqrt{39168}} \approx 5{,}82\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0