Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^3$ _____

2) $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{x^3}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^3 (2x^2)\,dx =$ _____

2) $\int_1^3 (5x^2 - 2x)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1\,|\,7)$, $P_2(2\,|\,13)$, $P_3(3\,|\,23)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -0{,}13)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(4 \mid -6 \mid -5) \cdot (-3 \mid -3 \mid 2) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einer Nährlösung vermehren sich Bakterien. Die Anzahl der Bakterien nach t Stunden beschreibt N(t) = 1000 · e^(0,3t). Tipp: Wenn die Unbekannte im Exponenten steht, hilft der natürliche Logarithmus ln – er macht e^(…) rückgängig. Die Ableitung N´(t) gibt an, wie viele Bakterien pro Stunde gerade dazukommen.

1) Wie viele Bakterien sind es nach 6 Stunden? (ganze Zahl) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl verdoppelt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Wann sind es zehnmal so viele Bakterien wie am Anfang? (2 Stellen) (2 P.) _____

4) Wie schnell wächst die Kultur nach 6 Stunden? (Bakterien pro Stunde, ganze Zahl) (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Eine Anlage füllt Saft in Flaschen. Die Füllmenge X (in ml) ist normalverteilt mit dem Erwartungswert my = 750 ml und der Standardabweichung sigma = 4 ml. Tipp: Standardisiere mit z = (x – my) : sigma und lies ?(z) in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner ab. Für „mehr als“ rechnest Du 1 – ?(z). Werte aus der Tabelle dürfen etwas abweichen.

1) Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weniger als 740 ml enthält (3 Stellen) (2 P.) _____

2) Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge höchstens 4 ml von μ abweicht (3 Stellen) (2 P.) _____

3) Wie viele von 2000 Flaschen enthalten voraussichtlich weniger als 740 ml? (ganze Zahl) (2 P.) _____

4) Ab welcher Füllmenge gehört eine Flasche zu den 5\,\% vollsten? (1 Stelle) (2 P.) _____

5) Auf welchen Wert muss σ sinken, damit nur 1\,\% der Flaschen weniger als 740 ml enthalten? (2 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|1) + t · (9|6|2), die von Flugzeug F2 ist (47|6|9) + t · (-9|8|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}x^2$

2) $f'(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{9}{x^4}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^3 (2x^2)\,dx = \frac{38}{3}$

2) $\int_1^3 (5x^2 - 2x)\,dx = \frac{106}{3}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = 2x^2 + 5$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -0{,}13) = 1 - \Phi(-0{,}13) \approx 0{,}5517$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(4 \mid -6 \mid -5) \cdot (-3 \mid -3 \mid 2) = -4$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $N(6) = 1000 \cdot e^{1{,}8} \approx 6050$

2) $1000 \cdot e^{0{,}3t} = 2000 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}31\,\text{h}$

3) $e^{0{,}3t} = 10 \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0{,}3} \approx 7{,}68\,\text{h}$

4) $N'(t) = 300 \cdot e^{0{,}3t} \Rightarrow N'(6) \approx 1815$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X < 740) = \Phi\left(\frac{740-750}{4}\right) = \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}006$

2) $P(746 \leq X \leq 754) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0{,}683$

3) $2000 \cdot 0{,}0062 \approx 12$

4) $P(X \geq c) = 0{,}05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c-750}{4}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{c-750}{4} \approx 1{,}645 \Rightarrow c \approx 756{,}6\,\text{ml}$

5) $\Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) = 0{,}01 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} \approx 2{,}326 \Rightarrow \sigma \approx 4{,}3\,\text{ml}$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{81 + 36 + 4} = 11\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{2}{11} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}48^\circ$

3) $(0|0|1) + 3 \cdot (9|6|2) = (27|18|7)$

4) $d(t)^2 = |(-47| - 6| - 8) + t \cdot (18| - 2|2)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}56\,\text{min}$

5) $d(2{,}56) \approx 11{,}52\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0