Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x^2$ _____

2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_0^1 (4x^2 + 2x + 5)\,dx =$ _____

2) $\int_1^4 (5x^2 - 4x + 2)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-2\,|\,3)$, $P_2(2\,|\,51)$, $P_3(3\,|\,73)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq 0{,}08)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-6 \mid 0 \mid -2) \cdot (-4 \mid 2 \mid 6) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 100 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 6 · (5 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 100 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Eine Anlage füllt Saft in Flaschen. Die Füllmenge X (in ml) ist normalverteilt mit dem Erwartungswert my = 500 ml und der Standardabweichung sigma = 5 ml. Tipp: Standardisiere mit z = (x – my) : sigma und lies ?(z) in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner ab. Für „mehr als“ rechnest Du 1 – ?(z). Werte aus der Tabelle dürfen etwas abweichen.

1) Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weniger als 492,5 ml enthält (3 Stellen) (2 P.) _____

2) Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge höchstens 5 ml von μ abweicht (3 Stellen) (2 P.) _____

3) Wie viele von 2000 Flaschen enthalten voraussichtlich weniger als 492,5 ml? (ganze Zahl) (2 P.) _____

4) Ab welcher Füllmenge gehört eine Flasche zu den 5\,\% vollsten? (1 Stelle) (2 P.) _____

5) Auf welchen Wert muss σ sinken, damit nur 1\,\% der Flaschen weniger als 492,5 ml enthalten? (2 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(8|0|0), B(0|8|0) und C(0|0|4) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(2|2|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{4}{x^3} - x$

2) $f'(x) = 3x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_0^1 (4x^2 + 2x + 5)\,dx = \frac{22}{3}$

2) $\int_1^4 (5x^2 - 4x + 2)\,dx = 81$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = 2x^2 + 12x + 19$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq 0{,}08) = 1 - \Phi(0{,}08) \approx 0{,}4681$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-6 \mid 0 \mid -2) \cdot (-4 \mid 2 \mid 6) = 12$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $V(t) = 100 + \int_0^t 6(5 - s)\,ds = 100 + 30t - 3t^2$

2) $r(t) = 0 \Rightarrow t = 5\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

3) $V(5) = 100 + 150 - 75 = 175\,\text{m}^3$

4) $V(t) = 100 \Rightarrow 30t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 10\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X < 492{,}5) = \Phi\left(\frac{492{,}5 - 500}{5}\right) = \Phi(-1{,}5) \approx 0{,}067$

2) $P(495 \leq X \leq 505) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0{,}683$

3) $2000 \cdot 0{,}0668 \approx 134$

4) $P(X \geq c) = 0{,}05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c - 500}{5}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{c - 500}{5} \approx 1{,}645 \Rightarrow c \approx 508{,}2\,\text{ml}$

5) $\Phi\left(\frac{-7{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}01 \Rightarrow \frac{7{,}5}{\sigma} \approx 2{,}326 \Rightarrow \sigma \approx 3{,}22\,\text{ml}$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \\ 64 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{6144} \approx 39{,}19\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{64}{\sqrt{6144}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26^\circ$

3) $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1$ mit $x = 2,\ y = 2 \Rightarrow S(2 \mid 2 \mid 2)$

4) $d = \frac{|32 \cdot 0 + 32 \cdot 0 + 64 \cdot 0 - 256|}{\sqrt{6144}} \approx 3{,}27\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0