

Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____

Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Punkte: _____ von 52 Note: _____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. $4/x = 4 \cdot x^{-1}$.

1) $f(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{5}x^4$ _____

2) $f(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 6\sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: $F(b) - F(a)$. Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (x) dx =$ _____

2) $\int_0^2 (2x^2 - 6x + 5) dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1 | 1)$, $P_2(1 | 17)$, $P_3(2 | 31)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit $z = (x - \text{Erwartungswert}) : \text{Standardabweichung}$ und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq 1,08)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid -3 \mid -2) \cdot (1 \mid 0 \mid 3) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn ($t = 0$) 100 m^3 Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt $r(t) = 6 \cdot (6 - t)$ in m^3 pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: $V(t) = 100 + \int_0^t r(s) \, ds$. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Eine Anlage füllt Saft in Flaschen. Die Füllmenge X (in ml) ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500 \text{ ml}$ und der Standardabweichung $\sigma = 5 \text{ ml}$. Tipp: Standardisiere mit $z = (x - \mu) : \sigma$ und lies $\Phi(z)$ in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner ab. Für „mehr als“ rechnest Du $1 - \Phi(z)$. Werte aus der Tabelle dürfen etwas abweichen.

1) Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weniger als 490 ml enthält (3 Stellen) (2 P.) _____

2) Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge höchstens 5 ml von μ abweicht (3 Stellen) (2 P.) _____

3) Wie viele von 1000 Flaschen enthalten voraussichtlich weniger als 490 ml? (ganze Zahl) (2 P.) _____

4) Ab welcher Füllmenge gehört eine Flasche zu den 5%,% vollsten? (1 Stelle) (2 P.) _____

5) Auf welchen Wert muss σ sinken, damit nur 1%,% der Flaschen weniger als 490 ml enthalten? (2 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist $(0|0|2) + t \cdot (12|4|3)$, die von Flugzeug F2 ist $(51|0|4) + t \cdot (-8|2|0)$. Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand $d(t)$ der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 2 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

$$1) \quad f'(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{12}{5}x^3$$

$$2) \quad f'(x) = -\frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

$$1) \quad \int_1^4 (x) dx = \frac{15}{2}$$

$$2) \quad \int_0^2 (2x^2 - 6x + 5) dx = \frac{10}{3}$$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

$$1) \quad f(x) = 2x^2 + 8x + 7$$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

$$1) \quad P(Z \geq 1,08) = 1 - \Phi(1,08) \approx 0,1401$$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

$$1) \quad (-1 \mid -3 \mid -2) \cdot (1 \mid 0 \mid 3) = -7$$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

$$1) \quad V(t) = 100 + \int_0^t 6(6 - s) ds = 100 + 36t - 3t^2$$

$$2) \quad r(t) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ h} \quad (\text{Vorzeichenwechsel von } + \text{ nach } -)$$

$$3) \quad V(6) = 100 + 216 - 108 = 208 \text{ m}^3$$

$$4) \quad V(t) = 100 \Rightarrow 36t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 12 \text{ h} \quad (t = 0 \text{ ist der Anfang})$$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

$$1) \quad P(X < 490) = \Phi\left(\frac{490 - 500}{5}\right) = \Phi(-2) \approx 0,023$$

$$2) \quad P(495 \leq X \leq 505) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0,683$$

$$3) \quad 1000 \cdot 0,0228 \approx 23$$

$$4) \quad P(X \geq c) = 0,05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c - 500}{5}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{c - 500}{5} \approx 1,645 \Rightarrow c \approx 508,2 \text{ ml}$$

$$5) \quad \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) = 0,01 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} \approx 2,326 \Rightarrow \sigma \approx 4,3 \text{ ml}$$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13 \frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin \alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13,34^\circ$

3) $(0|0|2) + 2 \cdot (12|4|3) = (24|8|8)$

4) $d(t)^2 = |(-51|0| - 2) + t \cdot (20|2|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2,48 \text{ min}$

5) $d(2,48) \approx 7,49 \text{ km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0