Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{x^2}$ _____

2) $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^4$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^2 (3x)\,dx =$ _____

2) $\int_0^3 (-3x - 4)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $T(-3\,|\,3)$, $P(-4\,|\,4)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \leq 1{,}29)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) (5 | –6 | –2) · (6 | –3 | 2) = _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 1) · e^(–x). Es gilt f´(x) = –x · e^(–x) und f´´(x) = (x – 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 2) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-1 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Hersteller behauptet: Höchstens 5 % seiner Bauteile sind fehlerhaft. Ein Kunde prüft 50 zufällig ausgewählte Teile. X ist die Anzahl der fehlerhaften Teile. Getestet wird die Nullhypothese H0: p <= 0,05 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Findet der Kunde auffällig viele fehlerhafte Teile, glaubt er dem Hersteller nicht mehr (H0 wird abgelehnt). Tipp: Rechne mit p = 0,05 und suche das kleinste k, für das P(X >= k) höchstens 0,05 ist.

1) Wie viele fehlerhafte Teile erwartet man, wenn der Hersteller recht hat? (2 P.) _____

2) Berechne die Standardabweichung σ (2 Stellen). (2 P.) _____

3) Ab wie vielen fehlerhaften Teilen wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art? (4 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|1) + t · (9|6|2), die von Flugzeug F2 ist (38|-4|9) + t · (-6|8|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = \frac{10}{3}x - \frac{8}{x^3}$

2) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{16}{3}x^3$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^2 (3x)dx = \frac{9}{2}$

2) $\int_0^3 (-3x - 4)dx = -\frac{51}{2}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = x^2 + 6x + 12$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le 1{,}29) = \Phi(1{,}29) \approx 0{,}9015$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(5 \mid -6 \mid -2) \cdot (6 \mid -3 \mid 2) = 44$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $(x + 1) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = e^0 \approx 1 \Rightarrow H(0 \mid 1)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \Rightarrow W(1 \mid 0{,}74)$

4) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -2 + e^1 \approx 0{,}72$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}05 = 2{,}5$

2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2{,}38} \approx 1{,}54$

3) $P(X \ge 5) \approx 0{,}1036 > 0{,}05, \quad P(X \ge 6) \approx 0{,}0378 \le 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{6, \ldots, 50\}$

4) $\alpha = P(X \ge 6) \approx 0{,}0378$ (H_0 wird abgelehnt, obwohl sie stimmt)

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{81 + 36 + 4} = 11\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{2}{11} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}48^\circ$

3) $(0|0|1) + 3 \cdot (9|6|2) = (27|18|7)$

4) $d(t)^2 = |(-38|4| - 8) + t \cdot (15| - 2|2)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}55\,\text{min}$

5) $d(2{,}55) \approx 3{,}11\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0