Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{x^2}$ _____

2) $f(x) = -x^3 + \frac{6}{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^3 (5x^2 - 2x - 5)\,dx =$ _____

2) $\int_1^4 (4x)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $H(2\,|\,0)$, $P(1\,|\,-2)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le -2{,}36)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid 2 \mid -4) \cdot (2 \mid -3 \mid 3) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 60 · e^(–0,05t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 60 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Die Bürgermeisterin behauptet: Mindestens 60 % der Bürger sind für den neuen Radweg. Eine Zeitung befragt 50 zufällig ausgewählte Bürger. X ist die Anzahl der Befürworter. Getestet wird H0: p >= 0,6 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Sind es auffällig wenige Befürworter, wird H0 abgelehnt. Tipp: Rechne mit p = 0,6 und suche das größte k mit P(X <= k) <= 0,05. Beim Fehler 2. Art behält man H0, obwohl sie falsch ist.

1) Erwartungswert von X, wenn die Bürgermeisterin genau recht hat (1 P.) _____

2) Bis zu wie vielen Befürwortern wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

3) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (4 Stellen) (2 P.) _____

4) In Wahrheit sind nur 50\,\% dafür. Wie groß ist der Fehler 2. Art? (4 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(8|0|0), B(0|4|0) und C(0|0|4) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(2|1|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{x^3}$

2) $f'(x) = -3x^2 - \frac{6}{x^2}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^3 (5x^2 - 2x - 5)dx = \frac{65}{3}$

2) $\int_1^4 (4x)dx = 30$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le -2{,}36) = \Phi(-2{,}36) \approx 0{,}0091$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-1 \mid 2 \mid -4) \cdot (2 \mid -3 \mid 3) = -20$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 60 \cdot e^0 = 80^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}5} \approx 56{,}39^\circ\text{C}$

3) $60 \cdot e^{-0{,}05t} = 25 \Rightarrow t = \frac{\ln(60/25)}{0{,}05} \approx 17{,}51\,\text{min}$

4) $T'(t) = -3 \cdot e^{-0{,}05t} \Rightarrow T'(10) \approx -1{,}82\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = 50 \cdot 0{,}6 = 30$

2) $P(X \le 23) \approx 0{,}0314 \le 0{,}05, \quad P(X \le 24) \approx 0{,}0573 > 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{0, \ldots, 23\}$

3) $\alpha = P(X \le 23) \approx 0{,}0314$

4) $\beta = P_{p=0{,}5}(X \ge 24) = 1 - P(X \le 23) \approx 0{,}6641$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 32 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{2304} \approx 24\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{32}{\sqrt{2304}} \Rightarrow \alpha \approx 48{,}19^\circ$

3) $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$ mit $x = 2,\ y = 1 \Rightarrow S(2 \mid 1 \mid 2)$

4) $d = \frac{|16 \cdot 0 + 32 \cdot 0 + 32 \cdot 0 - 128|}{\sqrt{2304}} \approx 2{,}67\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0