Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ _____

2) $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3\sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^2 (-5x^2)\,dx =$ _____

2) $\int_0^3 (2x - 1)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-2\,|\,1)$, $P_2(0\,|\,1)$, $P_3(2\,|\,-7)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le -2{,}08)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid -4 \mid -3) \cdot (6 \mid -4 \mid -5) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einer Nährlösung vermehren sich Bakterien. Die Anzahl der Bakterien nach t Stunden beschreibt N(t) = 1000 · e^(0,3t). Tipp: Wenn die Unbekannte im Exponenten steht, hilft der natürliche Logarithmus ln – er macht e^(…) rückgängig. Die Ableitung N´(t) gibt an, wie viele Bakterien pro Stunde gerade dazukommen.

1) Wie viele Bakterien sind es nach 6 Stunden? (ganze Zahl) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl verdoppelt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Wann sind es zehnmal so viele Bakterien wie am Anfang? (2 Stellen) (2 P.) _____

4) Wie schnell wächst die Kultur nach 6 Stunden? (Bakterien pro Stunde, ganze Zahl) (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 8-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit n = 8 und p = 0,2. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 3)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(12|0|0), B(0|8|0) und C(0|0|12) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(3|2|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$

2) $f'(x) = 5x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^2 (-5x^2)\,dx = -\frac{35}{3}$

2) $\int_0^3 (2x - 1)\,dx = 6$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le -2{,}08) = \Phi(-2{,}08) \approx 0{,}0188$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-1 \mid -4 \mid -3) \cdot (6 \mid -4 \mid -5) = 25$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $N(6) = 1000 \cdot e^{1{,}8} \approx 6050$

2) $1000 \cdot e^{0{,}3t} = 2000 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}31\,\text{h}$

3) $e^{0{,}3t} = 10 \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0{,}3} \approx 7{,}68\,\text{h}$

4) $N'(t) = 300 \cdot e^{0{,}3t} \Rightarrow N'(6) \approx 1815$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^5 \approx 0{,}1468$

2) $E(X) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$

3) $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^8 \approx 0{,}8322$

4) $1 - 0{,}8^m \ge 0{,}9 \Rightarrow m \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}319 \Rightarrow m = 11$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 96 \\ 144 \\ 96 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{39168} \approx 98{,}95\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{96}{\sqrt{39168}} \Rightarrow \alpha \approx 60{,}98^\circ$

3) $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{12} = 1$ mit $x = 3,\ y = 2 \Rightarrow S(3 \mid 2 \mid 6)$

4) $d = \frac{|96 \cdot 0 + 144 \cdot 0 + 96 \cdot 0 - 1152|}{\sqrt{39168}} \approx 5{,}82\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0