Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{x^2}$ _____

2) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x^3}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_0^3 (5x)\,dx =$ _____

2) $\int_0^2 (3x^2)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $H(1\,|\,2)$, $P(3\,|\,-6)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -1{,}12)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(3 \mid 0 \mid -1) \cdot (-6 \mid -6 \mid 0) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 100 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 4 · (3 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 100 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Die Bürgermeisterin behauptet: Mindestens 50 % der Bürger sind für den neuen Radweg. Eine Zeitung befragt 100 zufällig ausgewählte Bürger. X ist die Anzahl der Befürworter. Getestet wird H0: p >= 0,5 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Sind es auffällig wenige Befürworter, wird H0 abgelehnt. Tipp: Rechne mit p = 0,5 und suche das größte k mit P(X <= k) <= 0,05. Beim Fehler 2. Art behält man H0, obwohl sie falsch ist.

1) Erwartungswert von X, wenn die Bürgermeisterin genau recht hat (1 P.) _____

2) Bis zu wie vielen Befürwortern wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

3) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (4 Stellen) (2 P.) _____

4) In Wahrheit sind nur 40\,\% dafür. Wie groß ist der Fehler 2. Art? (4 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein Zelt hat die Form einer Pyramide mit quadratischem Boden ABCD und Spitze S: A(0|0|0), B(4|0|0), C(4|4|0), D(0|4|0) und S(2|2|4). Eine Längeneinheit ist 1 m. Tipp: Eine Kante ist ein Vektor – ihre Länge ist sein Betrag.

1) Wie lang ist die Kante $\overline{AS}$? (auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

2) Wie groß ist das Volumen des Zelts? (2 P.) _____

3) Neigungswinkel der Kante *AS* gegen den Boden (auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Mittelpunkt *M* der Kante *BS* (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 - \frac{2}{x^3}$

2) $f'(x) = 2x + \frac{6}{x^4}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_0^3 (5x)\,dx = \frac{45}{2}$

2) $\int_0^2 (3x^2)\,dx = 8$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 + 4x$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -1{,}12) = 1 - \Phi(-1{,}12) \approx 0{,}8686$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(3 \mid 0 \mid -1) \cdot (-6 \mid -6 \mid 0) = -18$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $V(t) = 100 + \int_0^t 4(3 - s)\,ds = 100 + 12t - 2t^2$

2) $r(t) = 0 \Rightarrow t = 3\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

3) $V(3) = 100 + 36 - 18 = 118\,\text{m}^3$

4) $V(t) = 100 \Rightarrow 12t - 2t^2 = 0 \Rightarrow t = 6\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$

2) $P(X \leq 41) \approx 0{,}0443 \leq 0{,}05, \quad P(X \leq 42) \approx 0{,}0666 > 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{0, \ldots, 41\}$

3) $\alpha = P(X \leq 41) \approx 0{,}0443$

4) $\beta = P_{p=0{,}4}(X \geq 42) = 1 - P(X \leq 41) \approx 0{,}3775$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}9\,\text{m}$

2) $V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 = 21{,}33\,\text{m}^3$

3) $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{24}} \Rightarrow \alpha \approx 54{,}74^\circ$

4) $M\left(\frac{4+2}{2} \mid \frac{0+2}{2} \mid \frac{0+4}{2}\right) = M(3 \mid 1 \mid 2)$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0