Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 4\sqrt{x}$ _____

2) $f(x) = -\frac{5}{x} + \frac{4}{5}x^3$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^4 (-6x^2 - 5x)\,dx =$ _____

2) $\int_2^3 (x^2 - 2)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1\,|\,3)$, $P_2(2\,|\,-6)$, $P_3(3\,|\,-13)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -2{,}41)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid 4 \mid 1) \cdot (4 \mid 4 \mid 6) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 80 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 2 · (6 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 80 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Die Bürgermeisterin behauptet: Mindestens 50 % der Bürger sind für den neuen Radweg. Eine Zeitung befragt 100 zufällig ausgewählte Bürger. X ist die Anzahl der Befürworter. Getestet wird H0: p >= 0,5 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Sind es auffällig wenige Befürworter, wird H0 abgelehnt. Tipp: Rechne mit p = 0,5 und suche das größte k mit P(X <= k) <= 0,05. Beim Fehler 2. Art behält man H0, obwohl sie falsch ist.

1) Erwartungswert von X, wenn die Bürgermeisterin genau recht hat (1 P.) _____

2) Bis zu wie vielen Befürwortern wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

3) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (4 Stellen) (2 P.) _____

4) In Wahrheit sind nur 40\,\% dafür. Wie groß ist der Fehler 2. Art? (4 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(12|0|0), B(0|8|0) und C(0|0|8) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(3|4|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -6x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}}$

2) $f'(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{12}{5}x^2$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^4 (-6x^2 - 5x)\,dx = -142$

2) $\int_2^3 (x^2 - 2)\,dx = \frac{13}{3}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -2{,}41) = 1 - \Phi(-2{,}41) \approx 0{,}992$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-1 \mid 4 \mid 1) \cdot (4 \mid 4 \mid 6) = 18$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $V(t) = 80 + \int_0^t 2(6 - s)\,ds = 80 + 12t - 1t^2$

2) $r(t) = 0 \Rightarrow t = 6\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

3) $V(6) = 80 + 72 - 36 = 116\,\text{m}^3$

4) $V(t) = 80 \Rightarrow 12t - 1t^2 = 0 \Rightarrow t = 12\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$

2) $P(X \leq 41) \approx 0{,}0443 \leq 0{,}05, \quad P(X \leq 42) \approx 0{,}0666 > 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{0, \ldots, 41\}$

3) $\alpha = P(X \leq 41) \approx 0{,}0443$

4) $\beta = P_{p=0{,}4}(X \geq 42) = 1 - P(X \leq 41) \approx 0{,}3775$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 64 \\ 96 \\ 96 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{22528} \approx 75{,}05\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{96}{\sqrt{22528}} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}24^\circ$

3) $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 1$ mit $x = 3,\ y = 4 \Rightarrow S(3 \mid 4 \mid 2)$

4) $d = \frac{|64 \cdot 0 + 96 \cdot 0 + 96 \cdot 0 - 768|}{\sqrt{22528}} \approx 5{,}12\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0