Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$ _____

2) $f(x) = \frac{5}{x^3} + \frac{1}{5}x^2$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (-5x + 5)\,dx =$ _____

2) $\int_2^5 (6x^2 - 5x + 1)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $H(0\,|\,-1)$, $P(-2\,|\,-9)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -1{,}49)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(2 \mid 3 \mid -4) \cdot (6 \mid -1 \mid -1) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 3$. Ihr Graph heißt G. Diese Aufgabe ist ohne Taschenrechner lösbar. Tipp: Extrempunkte: $f'(x) = 0$ lösen und mit f'' prüfen. Wendepunkt: $f''(x) = 0$. Die Wendetangente hat die Steigung $m = f'(x_W)$.

1) Schnittpunkt von G mit der y-Achse (1 P.) _____

2) Hoch- und Tiefpunkt von G (Schreibweise: H(…|…); T(…|…)) (4 P.) _____

3) Wendepunkt von G (2 P.) _____

4) Gleichung der Wendetangente (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 8-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit n = 8 und p = 0,3. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 3)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|2) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (37|3|4) + t · (-5|3|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 2 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $f'(x) = -\frac{15}{x^4} + \frac{2}{5}x$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^4 (-5x + 5)dx = -\frac{45}{2}$

2) $\int_2^5 (6x^2 - 5x + 1)dx = \frac{369}{2}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 - 1$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -1{,}49) = 1 - \Phi(-1{,}49) \approx 0{,}9319$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(2 \mid 3 \mid -4) \cdot (6 \mid -1 \mid -1) = 13$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $f(0) = 3 \Rightarrow S_y(0 \mid 3)$

2) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x + 4)(x - 2) = 0, \quad f''(-4) < 0,\ f''(2) > 0 \Rightarrow H(-4 \mid 83),\ T(2 \mid -25)$

3) $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow W(-1 \mid 29)$

4) $m = f'(-1) = -27 \Rightarrow t(x) = -27x + 2$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}2541$

2) $E(X) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7^8 \approx 0{,}9424$

4) $1 - 0{,}7^m \geq 0{,}9 \Rightarrow m \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}7} \approx 6{,}456 \Rightarrow m = 7$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|2) + 2 \cdot (12|4|3) = (24|8|8)$

4) $d(t)^2 = |(-37| - 3| - 2) + t \cdot (17|1|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}13\,\text{min}$

5) $d(2{,}13) \approx 4{,}54\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0