Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{x^3}$ _____

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3\sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^4 (-5x + 6)\,dx =$ _____

2) $\int_2^3 (6x^2 - 1)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $H(-3\,|\,4)$, $P(-2\,|\,3)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -1{,}45)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) (4 | 0 | 2) · (–1 | –5 | 5) = _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 70 · e^(–0,08t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 70 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Eine Anlage füllt Saft in Flaschen. Die Füllmenge X (in ml) ist normalverteilt mit dem Erwartungswert my = 750 ml und der Standardabweichung sigma = 8 ml. Tipp: Standardisiere mit z = (x – my) : sigma und lies ?(z) in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner ab. Für „mehr als“ rechnest Du 1 – ?(z). Werte aus der Tabelle dürfen etwas abweichen.

1) Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weniger als 730 ml enthält (3 Stellen) (2 P.) _____

2) Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge höchstens 8 ml von μ abweicht (3 Stellen) (2 P.) _____

3) Wie viele von 2000 Flaschen enthalten voraussichtlich weniger als 730 ml? (ganze Zahl) (2 P.) _____

4) Ab welcher Füllmenge gehört eine Flasche zu den 5\,\% vollsten? (1 Stelle) (2 P.) _____

5) Auf welchen Wert muss σ sinken, damit nur 1\,\% der Flaschen weniger als 730 ml enthalten? (2 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|3) + t · (9|6|2), die von Flugzeug F2 ist (40|-5|7) + t · (-7|8|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{x^4}$

2) $f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^4 (-5x + 6)\,dx = -18$

2) $\int_2^3 (6x^2 - 1)\,dx = 37$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -1{,}45) = 1 - \Phi(-1{,}45) \approx 0{,}9265$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(4 \mid 0 \mid 2) \cdot (-1 \mid -5 \mid 5) = 6$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 70 \cdot e^0 = 90\,^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}8} \approx 51{,}45\,^\circ\text{C}$

3) $70 \cdot e^{-0{,}08t} = 25 \Rightarrow t = \frac{\ln(70/25)}{0{,}08} \approx 12{,}87\,\text{min}$

4) $T'(t) = -5{,}6 \cdot e^{-0{,}08t} \Rightarrow T'(10) \approx -2{,}52\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X < 730) = \Phi\left(\frac{730-750}{8}\right) = \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}006$

2) $P(742 \leq X \leq 758) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0{,}683$

3) $2000 \cdot 0{,}0062 \approx 12$

4) $P(X \geq c) = 0{,}05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c-750}{8}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{c-750}{8} \approx 1{,}645 \Rightarrow c \approx 763{,}2\,\text{ml}$

5) $\Phi\left(\frac{-20}{\sigma}\right) = 0{,}01 \Rightarrow \frac{20}{\sigma} \approx 2{,}326 \Rightarrow \sigma \approx 8{,}6\,\text{ml}$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{81 + 36 + 4} = 11\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{2}{11} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}48^\circ$

3) $(0|0|3) + 3 \cdot (9|6|2) = (27|18|9)$

4) $d(t)^2 = |(-40|5| - 4) + t \cdot (16| - 2|2)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}49\,\text{min}$

5) $d(2{,}49) \approx 0{,}99\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0