Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -\frac{6}{x} + \frac{1}{3}x^4$ _____

2) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^5 (-5x^2 + 5x)\,dx =$ _____

2) $\int_2^4 (-5x)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $T(2\,|\,3)$, $P(4\,|\,11)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le 1{,}79)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-6 \mid -2 \mid -3) \cdot (1 \mid -3 \mid 6) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 3) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 2) · e^(–x) und f´´(x) = (x + 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 4) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-3 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 5-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit n = 5 und p = 0,25. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 2)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|2) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (47|10|4) + t · (-5|2|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 5 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{4}{3}x^3$

2) $f'(x) = -3x - \frac{2}{x^2}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^5 (-5x^2 + 5x)\,dx = -\frac{285}{2}$

2) $\int_2^4 (-5x)\,dx = -30$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le 1{,}79) = \Phi(1{,}79) \approx 0{,}9633$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-6 \mid -2 \mid -3) \cdot (1 \mid -3 \mid 6) = -18$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $(x + 3) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, \quad f(-2) = e^2 \approx 7{,}39 \Rightarrow H(-2 \mid 7{,}39)$

3) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 2e^1 \approx 5{,}44 \Rightarrow W(-1 \mid 5{,}44)$

4) $A = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-3) = -4 + e^3 \approx 16{,}09$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \approx 0{,}2637$

2) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$

3) $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}75^5 \approx 0{,}7627$

4) $1 - 0{,}75^m \ge 0{,}9 \Rightarrow m \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}75} \approx 8{,}004 \Rightarrow m = 9$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|2) + 5 \cdot (12|4|3) = (60|20|17)$

4) $d(t)^2 = |(-47| - 10| - 2) + t \cdot (17|2|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}73\,\text{min}$

5) $d(2{,}73) \approx 7{,}7\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0