Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -\frac{4}{5}x^3 + 5\sqrt{x}$ _____

2) $f(x) = -\frac{6}{x^2} - \frac{4}{3}x^2$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^3 (x^2 + 5x)\,dx =$ _____

2) $\int_1^3 (4x + 5)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $T(0\,|\,-5)$, $P(-1\,|\,-4)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le -1{,}22)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid -4 \mid 3) \cdot (0 \mid -2 \mid -4) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt $r(t) = 0{,}5 \cdot t \cdot (10 - t)$ für $0 <= t <= 10$ (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 3 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 10 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 5-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}3$. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 2)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|3) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (42|4|9) + t · (-4|7|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{12}{5}x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

2) $f'(x) = \frac{12}{x^3} - \frac{8}{3}x$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^3 (x^2 + 5x)dx = \frac{113}{6}$

2) $\int_1^3 (4x + 5)dx = 26$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = x^2 - 5$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le -1{,}22) = \Phi(-1{,}22) \approx 0{,}1112$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-1 \mid -4 \mid 3) \cdot (0 \mid -2 \mid -4) = -4$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $r(3) = 10{,}5 \frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = 0{,}5 \cdot (10 - 2t) = 0 \Rightarrow t = 5\,\text{min}$

3) $r(5) = 12{,}5 \frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^{10} r(t)\,dt = 0{,}5 \cdot \left[10\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 83{,}33\,\text{l}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 \approx 0{,}3087$

2) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$

3) $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7^5 \approx 0{,}8319$

4) $1 - 0{,}7^m \ge 0{,}9 \Rightarrow m \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}7} \approx 6{,}456 \Rightarrow m = 7$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|3) + 3 \cdot (12|4|3) = (36|12|12)$

4) $d(t)^2 = |(-42| - 4| - 6) + t \cdot (16| - 3|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}47$ min

5) $d(2{,}47) \approx 11{,}76$ km

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0