Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -4\sqrt{x} - x^4$ _____

2) $f(x) = -\frac{1}{x} - 2x^4$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_0^3 (-3x^2)\,dx =$ _____

2) $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $T(2\,|\,4)$, $P(0\,|\,8)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le 1{,}6)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) (2 | –1 | 0) · (2 | 4 | –5) = _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 60 · e^(–0,04t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 60 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Hersteller behauptet: Höchstens 20 % seiner Bauteile sind fehlerhaft. Ein Kunde prüft 100 zufällig ausgewählte Teile. X ist die Anzahl der fehlerhaften Teile. Getestet wird die Nullhypothese H0: p <= 0,2 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Findet der Kunde auffällig viele fehlerhafte Teile, glaubt er dem Hersteller nicht mehr (H0 wird abgelehnt). Tipp: Rechne mit p = 0,2 und suche das kleinste k, für das P(X >= k) höchstens 0,05 ist.

1) Wie viele fehlerhafte Teile erwartet man, wenn der Hersteller recht hat? (2 P.) _____

2) Berechne die Standardabweichung σ (2 Stellen). (2 P.) _____

3) Ab wie vielen fehlerhaften Teilen wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art? (4 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(8|0|0), B(0|12|0) und C(0|0|12) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(2|6|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} - 4x^3$

2) $f'(x) = \frac{1}{x^2} - 8x^3$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_0^3 (-3x^2)\,dx = -27$

2) $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \frac{5}{6}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = x^2 - 4x + 8$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le 1{,}6) = \Phi(1{,}6) \approx 0{,}9452$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(2 \mid -1 \mid 0) \cdot (2 \mid 4 \mid -5) = 0$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 60 \cdot e^0 = 80\,^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}4} \approx 60{,}22\,^\circ\text{C}$

3) $60 \cdot e^{-0{,}04t} = 25 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(60/25)}{0{,}04} \approx 21{,}89\,\text{min}$

4) $T'(t) = -2{,}4 \cdot e^{-0{,}04t} \;\Rightarrow\; T'(10) \approx -1{,}61\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}2 = 20$

2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{16} \approx 4$

3) $P(X \ge 27) \approx 0{,}0558 > 0{,}05, \quad P(X \ge 28) \approx 0{,}0342 \le 0{,}05 \;\Rightarrow\; \overline{A} = \{28, \ldots, 100\}$

4) $\alpha = P(X \ge 28) \approx 0{,}0342$ (H_0 wird abgelehnt, obwohl sie stimmt)

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 144 \\ 96 \\ 96 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{39168} \approx 98{,}95\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{96}{\sqrt{39168}} \Rightarrow \alpha \approx 60{,}98^\circ$

3) $\frac{x}{8} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1$ mit $x = 2,\ y = 6 \Rightarrow S(2 \mid 6 \mid 3)$

4) $d = \frac{|144 \cdot 0 + 96 \cdot 0 + 96 \cdot 0 - 1152|}{\sqrt{39168}} \approx 5{,}82\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0