

Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____

Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Punkte: _____ von 52 Note: _____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. $4/x = 4 \cdot x^{-1}$.

1) $f(x) = 5\sqrt{x} - \frac{5}{3}x^4$ _____

2) $f(x) = -\frac{1}{x^3} - \frac{5}{4}x^3$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: $F(b) - F(a)$. Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_0^1 (-2x + 1)dx =$ _____

2) $\int_0^2 (2x)dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(0 | -1)$, $P_2(2 | 7)$, $P_3(3 | 17)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit $z = (x - \text{Erwartungswert}) : \text{Standardabweichung}$ und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq 0,68)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(5 \mid 6 \mid 2) \cdot (2 \mid 6 \mid 2) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt $r(t) = 2 \cdot t \cdot (8 - t)$ für $0 \leq t \leq 8$ (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 3 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 8 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Eine Anlage füllt Saft in Flaschen. Die Füllmenge X (in ml) ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ ml und der Standardabweichung $\sigma = 5$ ml. Tipp: Standardisiere mit $z = (x - \mu) : \sigma$ und lies $\Phi(z)$ in der Tabelle oder mit dem Taschenrechner ab. Für „mehr als“ rechnest Du $1 - \Phi(z)$. Werte aus der Tabelle dürfen etwas abweichen.

1) Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weniger als 492,5 ml enthält (3 Stellen) (2 P.) _____

2) Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge höchstens 5 ml von μ abweicht (3 Stellen) (2 P.) _____

3) Wie viele von 5000 Flaschen enthalten voraussichtlich weniger als 492,5 ml? (ganze Zahl) (2 P.) _____

4) Ab welcher Füllmenge gehört eine Flasche zu den 5%,
vollsten? (1 Stelle) (2 P.) _____

5) Auf welchen Wert muss σ sinken, damit nur 1%,
der Flaschen weniger als 492,5 ml enthalten? (2 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten $A(8|0|0)$, $B(0|12|0)$ und $C(0|0|8)$ befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x - y -Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z -Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2 , 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(2|6|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

$$1) \quad f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{20}{3}x^3$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{15}{4}x^2$$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

$$1) \quad \int_0^1 (-2x + 1) dx = 0$$

$$2) \quad \int_0^2 (2x) dx = 4$$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

$$1) \quad f(x) = 2x^2 - 1$$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

$$1) \quad P(Z \geq 0,68) = 1 - \Phi(0,68) \approx 0,2483$$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

$$1) \quad (5 \mid 6 \mid 2) \cdot (2 \mid 6 \mid 2) = 50$$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

$$1) \quad r(3) = 30 \frac{\text{l}}{\text{min}}$$

$$2) \quad r'(t) = 2 \cdot (8 - 2t) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ min}$$

$$3) \quad r(4) = 32 \frac{\text{l}}{\text{min}}$$

$$4) \quad \int_0^8 r(t) dt = 2 \cdot \left[8 \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^8 = 170,67 \text{ l}$$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

$$1) \quad P(X < 492,5) = \Phi\left(\frac{492,5 - 500}{5}\right) = \Phi(-1,5) \approx 0,067$$

$$2) \quad P(495 \leq X \leq 505) = 2 \Phi(1) - 1 \approx 0,683$$

$$3) \quad 5000 \cdot 0,0668 \approx 334$$

$$4) \quad P(X \geq c) = 0,05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c - 500}{5}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{c - 500}{5} \approx 1,645 \Rightarrow c \approx 508,2 \text{ ml}$$

$$5) \quad \Phi\left(\frac{-7,5}{\sigma}\right) = 0,01 \Rightarrow \frac{7,5}{\sigma} \approx 2,326 \Rightarrow \sigma \approx 3,22 \text{ ml}$$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

$$1) \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 96 \\ 64 \\ 96 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \sqrt{22528} \approx 75,05 \text{ m}^2$$

$$2) \quad \cos \alpha = \frac{96}{\sqrt{22528}} \Rightarrow \alpha \approx 50,24^\circ$$

$$3) \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{12} + \frac{z}{8} = 1 \text{ mit } x = 2, y = 6 \Rightarrow S(2 \mid 6 \mid 2)$$

$$4) \quad d = \frac{|96 \cdot 0 + 64 \cdot 0 + 96 \cdot 0 - 768|}{\sqrt{22528}} \approx 5,12 \text{ m}$$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0