Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{x^3}$ _____

2) $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{5}{2}x^3$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^5 (4x^2)\,dx =$ _____

2) $\int_0^3 (-5x + 4)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(0\,|\,3)$, $P_2(2\,|\,3)$, $P_3(3\,|\,-3)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq 1{,}87)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(2 \mid 6 \mid -5) \cdot (-6 \mid 3 \mid -5) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = 2 \cdot (x^3 - 3a \cdot x^2) + 1$ mit $a > 0$. Tipp: Der Parameter a ist eine feste Zahl, die Du nur nicht kennst – leite ab wie gewohnt. Für die Ortskurve stellst Du $x_T = \ldots$ nach a um und setzt in y_T ein.

1) x-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

2) y-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

3) Gleichung der Ortskurve aller Tiefpunkte (3 P.) _____

4) Für welches a liegt der Tiefpunkt auf der Höhe $y = -7$? (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Hersteller behauptet: Höchstens 10 % seiner Bauteile sind fehlerhaft. Ein Kunde prüft 50 zufällig ausgewählte Teile. X ist die Anzahl der fehlerhaften Teile. Getestet wird die Nullhypothese $H_0: p <= 0{,}1$ auf dem Signifikanzniveau 5 %. Findet der Kunde auffällig viele fehlerhafte Teile, glaubt er dem Hersteller nicht mehr (H_0 wird abgelehnt). Tipp: Rechne mit $p = 0{,}1$ und suche das kleinste k, für das $P(X >= k)$ höchstens 0,05 ist.

1) Wie viele fehlerhafte Teile erwartet man, wenn der Hersteller recht hat? (2 P.) _____

2) Berechne die Standardabweichung σ (2 Stellen). (2 P.) _____

3) Ab wie vielen fehlerhaften Teilen wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art? (4 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|3) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (38|3|6) + t · (-6|4|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 5 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = \frac{20}{3}x^3 - \frac{15}{x^4}$

2) $f'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{15}{2}x^2$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^5 (4x^2)dx = 156$

2) $\int_0^3 (-5x + 4)dx = -\frac{21}{2}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq 1{,}87) = 1 - \Phi(1{,}87) \approx 0{,}0307$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(2 \mid 6 \mid -5) \cdot (-6 \mid 3 \mid -5) = 31$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $f_a'(x) = 6x^2 - 12ax = 6x(x - 2a) = 0, \quad f_a''(2a) = 12a > 0 \Rightarrow x_T = 2a$

2) $f_a(2a) = 2(8a^3 - 12a^3) + 1 = -8a^3 + 1$

3) $x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \Rightarrow y = -8\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 1 = -x^3 + 1$

4) $-8a^3 + 1 = -7 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}1 = 5$

2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}12$

3) $P(X \geq 9) \approx 0{,}0579 > 0{,}05, \quad P(X \geq 10) \approx 0{,}0245 \leq 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{10, \ldots, 50\}$

4) $\alpha = P(X \geq 10) \approx 0{,}0245$ (H_0 wird abgelehnt, obwohl sie stimmt)

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|3) + 5 \cdot (12|4|3) = (60|20|18)$

4) $d(t)^2 = |(-38| - 3| - 3) + t \cdot (18|0|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 2{,}08\,\text{min}$

5) $d(2{,}08) \approx 4{,}45\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0