Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -2x^2 + \frac{4}{x}$ _____

2) $f(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{4}{5}x^2$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (-x + 4)\,dx =$ _____

2) $\int_0^1 (x^2 - 5x + 1)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $T(2\,|\,1)$, $P(4\,|\,9)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -1{,}54)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(5 \mid 5 \mid -1) \cdot (-4 \mid 4 \mid -3) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 70 · e^(–0,05t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 70 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Hersteller behauptet: Höchstens 5 % seiner Bauteile sind fehlerhaft. Ein Kunde prüft 100 zufällig ausgewählte Teile. X ist die Anzahl der fehlerhaften Teile. Getestet wird die Nullhypothese H0: p <= 0,05 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Findet der Kunde auffällig viele fehlerhafte Teile, glaubt er dem Hersteller nicht mehr (H0 wird abgelehnt). Tipp: Rechne mit p = 0,05 und suche das kleinste k, für das P(X >= k) höchstens 0,05 ist.

1) Wie viele fehlerhafte Teile erwartet man, wenn der Hersteller recht hat? (2 P.) _____

2) Berechne die Standardabweichung σ (2 Stellen). (2 P.) _____

3) Ab wie vielen fehlerhaften Teilen wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art? (4 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|1) + t · (9|6|2), die von Flugzeug F2 ist (30|-4|4) + t · (-8|3|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -4x - \frac{4}{x^2}$

2) $f'(x) = -\frac{12}{x^3} + \frac{8}{5}x$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^4 (-x + 4)dx = \frac{9}{2}$

2) $\int_0^1 (x^2 - 5x + 1)dx = -\frac{7}{6}$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -1{,}54) = 1 - \Phi(-1{,}54) \approx 0{,}9382$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(5 \mid 5 \mid -1) \cdot (-4 \mid 4 \mid -3) = 3$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 70 \cdot e^0 = 90\,^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}5} \approx 62{,}46\,^\circ\text{C}$

3) $70 \cdot e^{-0{,}05t} = 25 \Rightarrow t = \frac{\ln(70/25)}{0{,}05} \approx 20{,}59\,\text{min}$

4) $T'(t) = -3{,}5 \cdot e^{-0{,}05t} \Rightarrow T'(10) \approx -2{,}12\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}05 = 5$

2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$

3) $P(X \geq 9) \approx 0{,}0631 > 0{,}05, \quad P(X \geq 10) \approx 0{,}0282 \leq 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{10, \ldots, 100\}$

4) $\alpha = P(X \geq 10) \approx 0{,}0282$ (H_0 wird abgelehnt, obwohl sie stimmt)

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{81 + 36 + 4} = 11\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{2}{11} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}48^\circ$

3) $(0|0|1) + 3 \cdot (9|6|2) = (27|18|7)$

4) $d(t)^2 = |(-30|4| - 3) + t \cdot (17|3|2)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 1{,}67$ min

5) $d(1{,}67) \approx 9{,}16$ km

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0