Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 6\sqrt{x}$ _____

2) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 - 4\sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (x^2)\,dx =$ _____

2) $\int_1^4 (x^2 - 3)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-2\,|\,55)$, $P_2(0\,|\,23)$, $P_3(3\,|\,5)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le -0{,}01)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-1 \mid 6 \mid -6) \cdot (1 \mid 4 \mid 5) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 60 · e^(–0,08t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 60 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Die Bürgermeisterin behauptet: Mindestens 70 % der Bürger sind für den neuen Radweg. Eine Zeitung befragt 100 zufällig ausgewählte Bürger. X ist die Anzahl der Befürworter. Getestet wird H0: p >= 0,7 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Sind es auffällig wenige Befürworter, wird H0 abgelehnt. Tipp: Rechne mit p = 0,7 und suche das größte k mit P(X <= k) <= 0,05. Beim Fehler 2. Art behält man H0, obwohl sie falsch ist.

1) Erwartungswert von X, wenn die Bürgermeisterin genau recht hat (1 P.) _____

2) Bis zu wie vielen Befürwortern wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

3) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (4 Stellen) (2 P.) _____

4) In Wahrheit sind nur 60\,\% dafür. Wie groß ist der Fehler 2. Art? (4 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|3) + t · (12|4|3), die von Flugzeug F2 ist (57|-3|4) + t · (-5|7|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

2) $f'(x) = -\frac{8}{3}x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^4 (x^2)dx = 21$

2) $\int_1^4 (x^2 - 3)dx = 12$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le -0{,}01) = \Phi(-0{,}01) \approx 0{,}496$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-1 \mid 6 \mid -6) \cdot (1 \mid 4 \mid 5) = -7$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 60 \cdot e^0 = 80^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}8} \approx 46{,}96^\circ\text{C}$

3) $60 \cdot e^{-0{,}08t} = 25 \Rightarrow t = \frac{\ln(60/25)}{0{,}08} \approx 10{,}94\,\text{min}$

4) $T'(t) = -4{,}8 \cdot e^{-0{,}08t} \Rightarrow T'(10) \approx -2{,}16\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = 100 \cdot 0{,}7 = 70$

2) $P(X \le 61) \approx 0{,}034 \le 0{,}05, \quad P(X \le 62) \approx 0{,}053 > 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{0, \ldots, 61\}$

3) $\alpha = P(X \le 61) \approx 0{,}034$

4) $\beta = P_{p=0{,}6}(X \ge 62) = 1 - P(X \le 61) \approx 0{,}3822$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{144 + 16 + 9} = 13\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow \alpha \approx 13{,}34^\circ$

3) $(0|0|3) + 3 \cdot (12|4|3) = (36|12|12)$

4) $d(t)^2 = |(-57|3| - 1) + t \cdot (17| - 3|3)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 3{,}2\,\text{min}$

5) $d(3{,}2) \approx 11{,}15\,\text{km}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0