Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -2x^4 + \frac{4}{x}$ _____

2) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4\sqrt{x}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_2^4 (4x + 3)dx =$ _____

2) $\int_1^3 (-6x^2)dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1\,|\,9)$, $P_2(0\,|\,6)$, $P_3(3\,|\,9)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq -0{,}04)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) (2 | 6 | 3) · (2 | –4 | –3) = _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

In einer Nährlösung vermehren sich Bakterien. Die Anzahl der Bakterien nach t Stunden beschreibt N(t) = 1000 · e^(0,25t). Tipp: Wenn die Unbekannte im Exponenten steht, hilft der natürliche Logarithmus ln – er macht e^(…) rückgängig. Die Ableitung N´(t) gibt an, wie viele Bakterien pro Stunde gerade dazukommen.

1) Wie viele Bakterien sind es nach 4 Stunden? (ganze Zahl) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl verdoppelt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Wann sind es zehnmal so viele Bakterien wie am Anfang? (2 Stellen) (2 P.) _____

4) Wie schnell wächst die Kultur nach 4 Stunden? (Bakterien pro Stunde, ganze Zahl) (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Hersteller behauptet: Höchstens 10 % seiner Bauteile sind fehlerhaft. Ein Kunde prüft 100 zufällig ausgewählte Teile. X ist die Anzahl der fehlerhaften Teile. Getestet wird die Nullhypothese H0: p <= 0,1 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Findet der Kunde auffällig viele fehlerhafte Teile, glaubt er dem Hersteller nicht mehr (H0 wird abgelehnt). Tipp: Rechne mit p = 0,1 und suche das kleinste k, für das P(X >= k) höchstens 0,05 ist.

1) Wie viele fehlerhafte Teile erwartet man, wenn der Hersteller recht hat? (2 P.) _____

2) Berechne die Standardabweichung σ (2 Stellen). (2 P.) _____

3) Ab wie vielen fehlerhaften Teilen wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art? (4 Stellen) (2 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Die Position eines Flugzeugs F1 nach t Minuten ist (0|0|2) + t · (9|6|2), die von Flugzeug F2 ist (30|2|6) + t · (-6|7|0). Alle Angaben in km, die x3-Achse zeigt nach oben. Tipp: Die Länge des Richtungsvektors ist die Strecke pro Minute. Den kleinsten Abstand findest Du, indem Du den Abstand d(t) der beiden Positionen aufstellst und das Minimum von $d(t)^2$ suchst.

1) Geschwindigkeit von F_1 in km/h (2 P.) _____

2) Steigungswinkel von F_1 gegenüber dem Boden (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Wo ist F_1 nach 3 Minuten? (2 P.) _____

4) Nach wie vielen Minuten sind sich die Flugzeuge am nächsten? (2 Stellen) (2 P.) _____

5) Wie groß ist dieser kleinste Abstand? (in km, 2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -8x^3 - \frac{4}{x^2}$

2) $f'(x) = 2x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_2^4 (4x + 3)dx = 30$

2) $\int_1^3 (-6x^2)dx = -52$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = x^2 - 2x + 6$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq -0{,}04) = 1 - \Phi(-0{,}04) \approx 0{,}516$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(2 \mid 6 \mid 3) \cdot (2 \mid -4 \mid -3) = -29$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $N(4) = 1000 \cdot e^1 \approx 2718$

2) $1000 \cdot e^{0{,}25t} = 2000 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}25} \approx 2{,}77\,\text{h}$

3) $e^{0{,}25t} = 10 \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0{,}25} \approx 9{,}21\,\text{h}$

4) $N'(t) = 250 \cdot e^{0{,}25t} \Rightarrow N'(4) \approx 680$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{9} \approx 3$

3) $P(X \geq 15) \approx 0{,}0726 > 0{,}05, \quad P(X \geq 16) \approx 0{,}0399 \leq 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{16, \ldots, 100\}$

4) $\alpha = P(X \geq 16) \approx 0{,}0399$ (H_0 wird abgelehnt, obwohl sie stimmt)

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\vec{u}| = \sqrt{81 + 36 + 4} = 11\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow 660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2) $\sin\alpha = \frac{2}{11} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}48^\circ$

3) $(0|0|2) + 3 \cdot (9|6|2) = (27|18|8)$

4) $d(t)^2 = |(-30| - 2| - 4) + t \cdot (15| - 1|2)|^2$ minimal $\Rightarrow t = 1{,}98$ min

5) $d(1{,}98) \approx 3{,}99$ km

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0