Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{5}{3}x^3$ _____

2) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 - \frac{6}{x^3}$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (5x + 2)\,dx =$ _____

2) $\int_1^3 (-6x^2 + 5x + 4)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $H(1 \mid -1)$, $P(3 \mid -9)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \geq 0{,}25)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) $(-2 \mid -4 \mid -6) \cdot (5 \mid 1 \mid 3) =$ _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = 2 \cdot (x^3 - 3a \cdot x^2) + 1$ mit $a > 0$. Tipp: Der Parameter a ist eine feste Zahl, die Du nur nicht kennst – leite ab wie gewohnt. Für die Ortskurve stellst Du $x_T = \ldots$ nach a um und setzt in y_T ein.

1) x-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

2) y-Koordinate des Tiefpunkts (Term mit a) (2 P.) _____

3) Gleichung der Ortskurve aller Tiefpunkte (3 P.) _____

4) Für welches a liegt der Tiefpunkt auf der Höhe $y = -63$? (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Ein Glücksrad bleibt mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auf „Gewinn“ stehen. Es wird 5-mal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft „Gewinn“ kommt. Weil sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Drehen nicht ändert, ist X binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}4$. Tipp: „mindestens einmal“ rechnest Du am leichtesten über das Gegenereignis „keinmal“.

1) Berechne $P(X = 2)$ (auf 4 Stellen runden). (3 P.) _____

2) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. (2 P.) _____

3) Berechne $P(X \geq 1)$ (auf 4 Stellen runden). (2 P.) _____

4) Wie oft muss man mindestens drehen, damit $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$ gilt? (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein Zelt hat die Form einer Pyramide mit quadratischem Boden ABCD und Spitze S: A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|4). Eine Längeneinheit ist 1 m. Tipp: Eine Kante ist ein Vektor – ihre Länge ist sein Betrag.

1) Wie lang ist die Kante $\overline{AS}$? (auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

2) Wie groß ist das Volumen des Zelts? (2 P.) _____

3) Neigungswinkel der Kante AS gegen den Boden (auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Mittelpunkt M der Kante BS (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -\frac{18}{x^4} + 5x^2$

2) $f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + \frac{18}{x^4}$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^4 (5x + 2)dx = \frac{87}{2}$

2) $\int_1^3 (-6x^2 + 5x + 4)dx = -24$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \geq 0{,}25) = 1 - \Phi(0{,}25) \approx 0{,}4013$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(-2 \mid -4 \mid -6) \cdot (5 \mid 1 \mid 3) = -32$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $f_a'(x) = 6x^2 - 12ax = 6x(x - 2a) = 0, \quad f_a''(2a) = 12a > 0 \Rightarrow x_T = 2a$

2) $f_a(2a) = 2(8a^3 - 12a^3) + 1 = -8a^3 + 1$

3) $x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \Rightarrow y = -8\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 1 = -x^3 + 1$

4) $-8a^3 + 1 = -63 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}3456$

2) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}4 = 2$

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^5 \approx 0{,}9222$

4) $1 - 0{,}6^m \geq 0{,}9 \Rightarrow m \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}6} \approx 4{,}508 \Rightarrow m = 5$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}93\,\text{m}$

2) $V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 4 = 85{,}33\,\text{m}^3$

3) $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{48}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26^\circ$

4) $M\left(\frac{8+4}{2} \mid \frac{0+4}{2} \mid \frac{0+4}{2}\right) = M(6 \mid 2 \mid 2)$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0