Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Punkte: _____ von 52 Note: ____

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

Bilde die erste Ableitung. Tipp: Schreibe Brüche vorher als Potenz mit negativer Hochzahl, z. B. 4/x = 4 · x^(–1).

1) $f(x) = -x^4 + \frac{5}{x^3}$ _____

2) $f(x) = \frac{2}{x^3} - x^4$ _____

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

Berechne die Integrale mit einer Stammfunktion: F(b) – F(a). Gib das Ergebnis exakt (als Bruch) an.

1) $\int_1^4 (6x - 3)\,dx =$ _____

2) $\int_2^5 (-6x^2 - 2)\,dx =$ _____

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

Bestimme die Funktionsgleichung aus den angegebenen Eigenschaften. H = Hochpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt, P = Punkt auf dem Graphen.

1) Grad 2: $P_1(-1\,|\,1)$, $P_2(0\,|\,2)$, $P_3(2\,|\,-2)$ _____

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

Standardisiere mit z = (x – Erwartungswert) : Standardabweichung und lies den Wert der Verteilungsfunktion ab. Runde auf 4 Nachkommastellen.

1) $P(Z \le 0{,}14)$ _____

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

Skalarprodukt: Multipliziere die Koordinaten paarweise und addiere die Produkte. Zwei Vektoren sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Winkel auf zwei Nachkommastellen runden.

1) (6 | 2 | 2) · (–1 | 1 | –5) = _____

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

Ein frisch aufgegossener Tee steht in einem Raum mit 20 °C. Seine Temperatur in °C nach t Minuten beschreibt T(t) = 20 + 60 · e^(–0,05t). Tipp: Der Tee kühlt nie unter die Raumtemperatur ab – der Teil 60 · e^(…) wird nur immer kleiner. Eine negative Änderungsrate bedeutet: Die Temperatur sinkt.

1) Wie heiß ist der Tee am Anfang? (2 P.) _____

2) Wie warm ist der Tee nach 10 Minuten? (2 Stellen) (2 P.) _____

3) Nach wie vielen Minuten ist der Tee auf 45 °C abgekühlt? (2 Stellen) (3 P.) _____

4) Berechne die Änderungsrate $T'(10)$ in °C pro Minute (2 Stellen). (3 P.) _____

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

Die Bürgermeisterin behauptet: Mindestens 70 % der Bürger sind für den neuen Radweg. Eine Zeitung befragt 100 zufällig ausgewählte Bürger. X ist die Anzahl der Befürworter. Getestet wird H0: p >= 0,7 auf dem Signifikanzniveau 5 %. Sind es auffällig wenige Befürworter, wird H0 abgelehnt. Tipp: Rechne mit p = 0,7 und suche das größte k mit P(X <= k) <= 0,05. Beim Fehler 2. Art behält man H0, obwohl sie falsch ist.

1) Erwartungswert von X, wenn die Bürgermeisterin genau recht hat (1 P.) _____

2) Bis zu wie vielen Befürwortern wird H_0 abgelehnt? (4 P.) _____

3) Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (4 Stellen) (2 P.) _____

4) In Wahrheit sind nur 60\,\% dafür. Wie groß ist der Fehler 2. Art? (4 Stellen) (3 P.) _____

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

Ein dreieckiges Sonnensegel ist an den Punkten A(4|0|0), B(0|12|0) und C(0|0|4) befestigt (Angaben in Metern). Der Boden ist die x-y-Ebene, der Ursprung O ist die Hausecke. Tipp: Den Normalenvektor des Segels bekommst Du mit dem Kreuzprodukt AB × AC. Der Winkel zum Boden ist der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und der z-Achse.

1) Wie groß ist die Fläche des Segels? (in m^2, 2 Stellen) (3 P.) _____

2) Unter welchem Winkel ist das Segel gegen den Boden geneigt? (2 Stellen) (3 P.) _____

3) Ein senkrechter Mast steht in $P(1|6|0)$. In welchem Punkt trifft er das Segel? (2 P.) _____

4) Wie weit ist die Hausecke O vom Segel entfernt? (2 Stellen) (2 P.) _____

Lösungen: Abitur-Mix: alle drei Sachgebiete

Aufgabe 1: Ableitungen (je 2 P.)

1) $f'(x) = -4x^3 - \frac{15}{x^4}$

2) $f'(x) = -\frac{6}{x^4} - 4x^3$

Aufgabe 2: Integrale (je 3 P.)

1) $\int_1^4 (6x - 3)dx = 36$

2) $\int_2^5 (-6x^2 - 2)dx = -240$

Aufgabe 3: Steckbriefaufgabe (5 P.)

1) $f(x) = -x^2 + 2$

Aufgabe 4: Normalverteilung (4 P.)

1) $P(Z \le 0{,}14) = \Phi(0{,}14) \approx 0{,}5557$

Aufgabe 5: Skalarprodukt (3 P.)

1) $(6 \mid 2 \mid 2) \cdot (-1 \mid 1 \mid -5) = -14$

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe Analysis (10 P.)

1) $T(0) = 20 + 60 \cdot e^0 = 80\,^\circ\text{C}$

2) $T(10) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}5} \approx 56{,}39\,^\circ\text{C}$

3) $60 \cdot e^{-0{,}05t} = 25 \Rightarrow t = \frac{\ln(60/25)}{0{,}05} \approx 17{,}51\,\text{min}$

4) $T'(t) = -3 \cdot e^{-0{,}05t} \Rightarrow T'(10) \approx -1{,}82\,\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$

Aufgabe 7: Anwendungsaufgabe Stochastik (10 P.)

1) $E(X) = 100 \cdot 0{,}7 = 70$

2) $P(X \le 61) \approx 0{,}034 \le 0{,}05, \quad P(X \le 62) \approx 0{,}053 > 0{,}05 \Rightarrow \overline{A} = \{0, \ldots, 61\}$

3) $\alpha = P(X \le 61) \approx 0{,}034$

4) $\beta = P_{p=0{,}6}(X \ge 62) = 1 - P(X \le 61) \approx 0{,}3822$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgabe Geometrie (10 P.)

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 48 \\ 16 \\ 48 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\sqrt{4864} \approx 34{,}87\,\text{m}^2$

2) $\cos\alpha = \frac{48}{\sqrt{4864}} \Rightarrow \alpha \approx 46{,}51^\circ$

3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} + \frac{z}{4} = 1$ mit $x = 1,\ y = 6 \Rightarrow S(1 \mid 6 \mid 1)$

4) $d = \frac{|48 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 48 \cdot 0 - 192|}{\sqrt{4864}} \approx 2{,}75\,\text{m}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 50	ab 47	ab 45	ab 42	ab 39	ab 37	ab 34	ab 32	ab 29	ab 26	ab 24	ab 21	ab 18	ab 15	ab 11	ab 0