# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-3x^2 - 3x - 6}{3x^2 - 6}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{-x}{3x^2 - 12x}$ : Definitionslücken _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 - 8x + 16}$ : Polstelle bei $x = 4$ mit oder ohne VZW? _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 1}{x^2 + 2}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h \to 0} \frac{3(h-2)^2 - 12}{h} =$ _____

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to -\infty} (7 - 8e^{2x}) =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-5}{-2x-5}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{-1}{(2x+5)^2}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int x^2(x^3 - 5)^2\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^4 \ln(x)\,dx =$ _____

2) $\int x\cos(x)\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 4x$ auf $[0; 3]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = 3e^{-2x}$ auf $[0; \infty)$ : Volumen _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 80 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 2 · (3 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 80 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

**1)** Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

**2)** Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

**3)** Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

**4)** Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = -1$

2) $x_1 = 0,\ x_2 = 4$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = 4$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x - 3 + \frac{-3x+7}{x^2+2} \Rightarrow y = x - 3$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{h\to 0} \frac{3(h-2)^2-12}{h} = -12$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x\to -\infty} (7 - 8e^{2x}) = 7$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-5}{-2x-5}\,dx = \frac{5}{2}\ln|-2x-5| + C$

2) $\int \frac{-1}{(2x+5)^2}\,dx = \frac{1}{2(2x+5)} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int x^2(x^3-5)^2\,dx = \frac{1}{9}(x^3-5)^3 + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^4\ln(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5 + C$

2) $\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^3 (16x^2)dx = 144\pi \approx 452{,}39$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $V = \pi\int_0^{\infty} 9e^{-4x}\,dx = \frac{9}{4}\pi \approx 7{,}07$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $V(t) = 80 + \int_0^t 2(3-s)\,ds = 80 + 6t - 1t^2$

**2)** $r(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 3\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

**3)** $V(3) = 80 + 18 - 9 = 89\,\text{m}^3$

**4)** $V(t) = 80 \;\Rightarrow\; 6t - 1t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 6\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |