Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{3x^2+5x-5}{4x^2+8}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{-2}{x^2+4x-12}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2-9x+20}$: Polstelle _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{3x^2+5x+2}{x+5}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -3^+} \frac{7}{x^2+6x+9} =$ _____

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x-4} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{-2x}}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int (-2x + 6)^5 \, dx =$ _____

2) $\int \cos(-2x - 3) \, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int x^2 (x^3 + 4)^3 \, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^5 \ln(x) \, dx =$ _____

2) $\int (-4x + 1) \, e^{-x} \, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 2x^2$ auf [1; 3] _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$: konvergent oder divergent? _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt $r(t) = 0{,}5 \cdot t \cdot (6 - t)$ für $0 <= t <= 6$ (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 2 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 6 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = \frac{3}{4}$

2) $x_1 = -6,\ x_2 = 2$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-1}{x-4}\ (x \neq 5) \Rightarrow x = 4$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = 3x - 10 + \frac{52}{x+5} \Rightarrow y = 3x - 10$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -3^+} \frac{7}{x^2+6x+9} = +\infty$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x-4} = 48$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x}-e^{-2x}}{x} = 7$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int (-2x+6)^5\,dx = -\frac{1}{12}(-2x+6)^6 + C$

2) $\int \cos(-2x-3)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(-2x-3) + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int x^2(x^3+4)^3\,dx = \frac{1}{12}(x^3+4)^4 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^5 \ln(x)\,dx = \frac{1}{6}x^6\ln(x) - \frac{1}{36}x^6 + C$

2) $\int (-4x+1)\,e^{-x}\,dx = (4x+3)\,e^{-x} + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_1^3 (4x^4)\,dx = \frac{968}{5}\pi \approx 608{,}21$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) divergent : $-\ln(a) \to \infty$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $r(2) = 4\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = 0{,}5 \cdot (6 - 2t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 3\,\text{min}$

3) $r(3) = 4{,}5\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^6 r(t)\,dt = 0{,}5 \cdot \left[6\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^6 = 18\,\text{l}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0