# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{3x^2 - 9}{4x^2 + 3}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{4x - 9}{x^2 + 2}$ : Nullstellen _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{-6}{x^2 + 2x + 1}$ : Polstelle bei $x = -1$ mit oder ohne VZW? _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x + 1}$ _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 0} (-3x^2 + 6x - 9) =$ _____

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-4}{(3x+7)^2}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{4}{(-2x-1)^2}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \sin(x)\cos^3(x)\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^2 \ln(x)\,dx =$ _____

2) $\int_0^3 2x\,e^x\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 5$ auf $[0;\ 2]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = \frac{4}{x}$ auf $[1;\ \infty)$ : Volumen _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 10 · t · e^(–0,25t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 10 · e^(–0,25t) · (1 – 0,25t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

**1)** Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**2)** Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**4)** Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = \frac{3}{4}$

2) $x = \frac{9}{4}$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = -1$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $+\infty$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} (-3x^2 + 6x - 9) = -9$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \frac{1}{8}$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-4}{(3x+7)^2}\,dx = \frac{4}{3(3x+7)} + C$

2) $\int \frac{4}{(-2x-1)^2}\,dx = \frac{2}{(-2x-1)} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \sin(x)\cos^3(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4(x) + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

2) $\int_0^3 2x\,e^x\,dx = 2(2e^3 + 1) \approx 82{,}34$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^2 (25)dx = 50\pi \approx 157{,}08$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $V = \pi\int_1^{\infty} \frac{16}{x^2}\,dx = 16\pi \approx 50{,}27$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $f(1) = 10 \cdot e^{-0{,}25} \approx 7{,}79\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**2)** $f'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}25t = 0 \;\Rightarrow\; t = 4\,\text{h}$

**3)** $f(4) = 40 \cdot e^{-1} \approx 14{,}72\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**4)** $f'(t) = 10 \cdot e^{-0{,}25t} \cdot (0{,}0625t - 0{,}5) = 0 \;\Rightarrow\; t = 8\,\text{h}$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |