Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{-2x - 7}$: Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

2) $f(x) = \frac{-5x^2 - 2}{3x^2 + 7}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 6^+} \frac{4}{x - 6}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-x^2 + 5x + 8}{x - 2}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -3} (-2x^2 - 6x - 2) =$ _____

2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{2x + 3}\, dx =$ _____

2) $\int \frac{-6}{(-x + 6)^2}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 4}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x \sin(2x)\, dx =$ _____

2) $\int x^2 e^{-x}\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3x + 1$ auf $[1; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = e^{-x}$ auf $[0; \infty)$: Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt r(t) = 0,5 · t · (12 – t) für 0 <= t <= 12 (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 1 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 12 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $f(0) = \frac{9}{7}$

2) $y = -\frac{5}{3}$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $+\infty$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = -x + 3 + \frac{14}{x-2} \Rightarrow y = -x + 3$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -3} \left(-2x^2 - 6x - 2\right) = -2$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} = 5$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \sqrt{2x + 3}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x + 3)^3} + C$

2) $\int \frac{-6}{(-x + 6)^2}\, dx = -\frac{6}{(-x + 6)} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 4}\, dx = \ln|x^2 - 6x + 4| + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

2) $\int x^2 e^{-x}\, dx = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x} + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_1^3 \left(9x^2 + 6x + 1\right) dx = 104\pi \approx 326{,}73$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \approx 1{,}57$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $r(1) = 5{,}5\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = 0{,}5 \cdot (12 - 2t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 6\,\text{min}$

3) $r(6) = 18\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^{12} r(t)\,dt = 0{,}5 \cdot \left[12\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{12} = 144\,\text{l}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0