Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$: Nullstellen _____

2) $f(x) = \frac{-x^2 - 6x - 9}{3x + 9}$: Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to -3^+} \frac{5}{x^2 + 6x + 9}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 5}{x + 1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} =$ _____

2) $\lim_{x \to -2^+} \frac{-1}{x^2 + 4x + 4} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{-3x}}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-1}{(3x-2)^2}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{1}{5x+7}\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int 2x\,(x^2 + 4)^5\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^4 \ln(x)\,dx =$ _____

2) $\int x^2 \ln(x)\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 3$ auf $[0; 2]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^3}\,dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 80 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 6 · (5 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 80 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x = 4$

2) $f(0) = -1$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $+\infty$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = -2x - 2 + \frac{7}{x+1} \Rightarrow y = -2x - 2$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = -7$

2) $\lim_{x \to -2^+} \frac{-1}{x^2 + 4x + 4} = -\infty$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{-3x}}{x} = 7$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-1}{(3x-2)^2}\,dx = \frac{1}{3(3x-2)} + C$

2) $\int \frac{1}{5x+7}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x + 7| + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int 2x\,(x^2 + 4)^5\,dx = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^6 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^4 \ln(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5 + C$

2) $\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^2 \left(x^4 - 6x^2 + 9\right)dx = \frac{42}{5}\pi \approx 26{,}39$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{4}{2x^2}\right]_1^b = 2$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $V(t) = 80 + \int_0^t 6(5-s)\,ds = 80 + 30t - 3t^2$

2) $r(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 5\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

3) $V(5) = 80 + 150 - 75 = 155\,\text{m}^3$

4) $V(t) = 80 \;\Rightarrow\; 30t - 3t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 10\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0