Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-6}{x^2+x-12}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{x^2-36}{x+5}$: Nullstellen _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 1} f(x)$ für $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-2x^2-5x+9}{-3x^2+6x+7}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2-2x+1} =$ _____

2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to \infty} (7 - 6e^{-x}) =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int 2e^{2x-1}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{-4}{(3x+5)^2}\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{2e^x}{e^x + 4}\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x \sin(4x)\,dx =$ _____

2) $\int x \cos(4x)\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 5$ auf $[0; 1]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = 3e^{-2x}$ auf $[0; \infty)$: Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 1) · e^(–x). Es gilt f´(x) = –x · e^(–x) und f´´(x) = (x – 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 2) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-1 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -4,\ x_2 = 3$

2) $x_1 = -6,\ x_2 = 6$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $y = \frac{2}{3}$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = +\infty$

2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = 3$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to \infty} \left(7 - 6e^{-x}\right) = 7$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 2e^{2x-1}\,dx = e^{2x-1} + C$

2) $\int \frac{-4}{(3x+5)^2}\,dx = \frac{4}{3(3x+5)} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{2e^x}{e^x + 4}\,dx = 2\ln(e^x + 4) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + C$

2) $\int x\cos(4x)\,dx = \frac{1}{4}x\sin(4x) + \frac{1}{16}\cos(4x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^1 \left(x^4 - 10x^2 + 25\right)dx = \frac{328}{15}\pi \approx 68{,}7$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_0^{\infty} 9e^{-4x}\,dx = \frac{9}{4}\pi \approx 7{,}07$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+1)\cdot e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$

2) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad f(0) = e^0 \approx 1 \;\Rightarrow\; H(0 \mid 1)$

3) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \;\Rightarrow\; W(1 \mid 0{,}74)$

4) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -2 + e^1 \approx 0{,}72$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0