# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{2x + 7}$ : Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{x - 6}$ : Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 12}$ : Polstelle bei $x = -3$ mit oder ohne VZW? _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5x - 1}{x^2 + 4}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} =$ _____

2) $\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x - 2} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

**1)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

**1)** $\int \frac{-3}{2x-4}\,dx =$ _____

**2)** $\int 2e^{4x-5}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

**1)** $\int \frac{2x-4}{x^2-4x-6}\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

**1)** $\int x\,e^{x}\,dx =$ _____

**2)** $\int_{1}^{e^4} 2\ln(x)\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

**1)** $f(x) = -x$ auf $[0; 6]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

**1)** $\int_{0}^{\infty} 9e^{-5x}\,dx$ _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 6 · t · e^(–0,25t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 6 · e^(–0,25t) · (1 – 0,25t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

**1)** Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**2)** Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**4)** Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

**1)** $f(0) = \frac{3}{7}$

**2)** $f(0) = \frac{7}{6}$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

**1)** mit VZW: $x = -3$ ist einfache Nullstelle des Nenners

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

**1)** $f(x) = x - 3 + \frac{-9x + 11}{x^2 + 4} \Rightarrow y = x - 3$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

**1)** $\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} = 75$

**2)** $\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x - 2} = -\infty$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

**1)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = 5$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

**1)** $\int \frac{-3}{2x - 4}\, dx = -\frac{3}{2} \ln|2x - 4| + C$

**2)** $\int 2e^{4x-5}\, dx = \frac{1}{2} e^{4x-5} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

**1)** $\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x - 6}\, dx = \ln|x^2 - 4x - 6| + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

**1)** $\int x\, e^x\, dx = xe^x - e^x + C$

**2)** $\int_1^{e^4} 2\ln(x)\, dx = 2(3e^4 + 1) \approx 329{,}59$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

**1)** $V = \pi \int_0^6 (x^2) dx = 72\pi \approx 226{,}19$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{9}{5}e^{-5x}\right]_0^b = \frac{9}{5}$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $f(1) = 6\cdot e^{-0{,}25} \approx 4{,}67\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**2)** $f'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}25t = 0 \;\Rightarrow\; t = 4\,\text{h}$

**3)** $f(4) = 24\cdot e^{-1} \approx 8{,}83\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**4)** $f'(t) = 6\cdot e^{-0{,}25t}\cdot(0{,}0625t - 0{,}5) = 0 \;\Rightarrow\; t = 8\,\text{h}$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |