Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{3x+7}{2x^2+5x-1}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{2x}{x^2-49}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-9x+20}{x^2+x-20}$: Polstelle _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-x^2-2x-5}{x+5}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} =$ _____

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{5}{x-6} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-6}{(-x-2)^2}\,dx =$ _____

2) $\int e^{x-4}\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int_1^{e^3} 3\ln(x)\,dx =$ _____

2) $\int_0^4 2x\,e^x\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 6$ auf $[0; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 1) · e^(–x). Es gilt f´(x) = –x · e^(–x) und f´´(x) = (x – 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 2) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-1 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 0$

2) $x_1 = -7,\ x_2 = 7$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-5}{x+5}\ (x \neq 4) \Rightarrow x = -5$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = -x + 3 - \frac{20}{x+5} \Rightarrow y = -x + 3$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{5}{x-6} = -\infty$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-6}{(-x-2)^2}\,dx = -\frac{6}{(-x-2)} + C$

2) $\int e^{x-4}\,dx = e^{x-4} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x + 1) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int_1^{e^3} 3\ln(x)\,dx = 3(2e^3 + 1) \approx 123{,}51$

2) $\int_0^4 2x\,e^x\,dx = 2(3e^4 + 1) \approx 329{,}59$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^3 (x^4 - 12x^2 + 36)dx = \frac{243}{5}\pi \approx 152{,}68$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x + 1) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = e^0 \approx 1 \Rightarrow H(0 \mid 1)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \Rightarrow W(1 \mid 0{,}74)$

4) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -2 + e^1 \approx 0{,}72$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0