Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 8}{-3x - 5}$: Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

2) $f(x) = \frac{4x - 2}{x^2 + 9}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{7}{x^2 - 4x + 4}$: Polstelle bei $x = 2$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 - 2x - 8}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -4} (-x^2 + 2x + 3) =$ _____

2) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-5)^2 - 25}{h} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{x^5} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-6}{-x+2}\,dx =$ _____

2) $\int (-3x-6)^6\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int 3x\,(x^2+5)^5\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^3 \ln(x)\,dx =$ _____

2) $\int x\,e^{-2x}\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 5x$ auf $[0;\,4]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = 3e^{-2x}$ auf $[0;\,\infty)$: Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 6 · t · e^(–0,5t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 6 · e^(–0,5t) · (1 – 0,5t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

1) Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

4) Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $f(0) = \frac{8}{5}$

2) keine Definitionslücken

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = 2$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $y = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -4} \left(-x^2 + 2x + 3\right) = -21$

2) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-5)^2 - 25}{h} = -10$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x}{x^5} = +\infty$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-6}{-x+2}\,dx = 6\ln|-x+2| + C$

2) $\int (-3x-6)^6\,dx = -\frac{1}{21}(-3x-6)^7 + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int 3x\,(x^2+5)^5\,dx = \frac{1}{4}(x^2+5)^6 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

2) $\int x\,e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^4 \left(25x^2\right)dx = \frac{1600}{3}\pi \approx 1675{,}52$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_0^{\infty} 9e^{-4x}\,dx = \frac{9}{4}\pi \approx 7{,}07$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $f(1) = 6 \cdot e^{-0{,}5} \approx 3{,}64\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

2) $f'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}5t = 0 \;\Rightarrow\; t = 2\,\text{h}$

3) $f(2) = 12 \cdot e^{-1} \approx 4{,}41\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

4) $f'(t) = 6 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (0{,}25t - 1) = 0 \;\Rightarrow\; t = 4\,\text{h}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0