Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x+6}{3x^2-2x-1}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+8x+15}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{-2}{x^2+10x+25}$: Polstelle bei $x = -5$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2-3x-7}{x-1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+1)^2+1}{h} =$ _____

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to -\infty} (-7 - 3e^{3x}) =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int (-2x + 4)^3 \, dx =$ _____

2) $\int -\cos(2x + 4) \, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{-2x+6}{x^2-6x-9} \, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x e^{2x} \, dx =$ _____

2) $\int x \sin(4x) \, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 2x^2$ auf $[0; 1]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$: konvergent oder divergent? _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 100 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 6 · (5 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 100 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

1) Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

3) Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

4) Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 0$

2) $x_1 = -5,\ x_2 = -3$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = -5$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x - 2 - \frac{9}{x-1} \Rightarrow y = x - 2$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+1)^2 + 1}{h} = -2$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to -\infty} \left(-7 - 3e^{3x}\right) = -7$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int (-2x + 4)^3\, dx = -\frac{1}{8}(-2x + 4)^4 + C$

2) $\int -\cos(2x + 4)\, dx = -\frac{1}{2}\sin(2x + 4) + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{-2x + 6}{x^2 - 6x - 9}\, dx = -\ln|x^2 - 6x - 9| + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

2) $\int x \sin(4x)\, dx = -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_0^1 \left(4x^4\right) dx = \frac{4}{5}\pi \approx 2{,}51$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) divergent : $2\sqrt{b} - 2 \to \infty$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $V(t) = 100 + \int_0^t 6(5 - s)\,ds = 100 + 30t - 3t^2$

2) $r(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 5\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

3) $V(5) = 100 + 150 - 75 = 175\,\text{m}^3$

4) $V(t) = 100 \;\Rightarrow\; 30t - 3t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 10\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0