# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x+7}{x^2-2x-6}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{-4x-6}{x^2-7x}$ : Definitionslücken _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2+3x+2}$ : Stelle der hebbaren Lücke _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2-x-8}{x-1}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h\to 0} \frac{(h+6)^2-36}{h} =$ _____

2) $\lim_{h\to 0} \frac{-(h+4)^2+16}{h} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

**1)** $\lim_{x \to \infty} -9xe^{-x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

**1)** $\int (-3x - 5)^4 \, dx =$ _____

**2)** $\int (4x + 7)^3 \, dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

**1)** $\int \cos(x) \sin^3(x) \, dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

**1)** $\int x^4 \ln(x) \, dx =$ _____

**2)** $\int_0^3 x \, e^x \, dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

**1)** $f(x) = -x^2 + 7$ auf [0; 3] _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

**1)** $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$ : konvergent oder divergent? _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 3) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 2) · e^(–x) und f´´(x) = (x + 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 4) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

**1)** Nullstelle von f (1 P.) _____

**2)** Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

**3)** Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

**4)** Fläche zwischen G und der x-Achse für $-3 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

**1)** $y = 0$

**2)** $x_1 = 0,\ x_2 = 7$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

**1)** $f(x) = \frac{x-4}{x+2}\ (x \neq -1) \Rightarrow x = -1$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

**1)** $f(x) = x - \frac{8}{x-1} \Rightarrow y = x$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

**1)** $\lim_{h\to 0} \frac{(h+6)^2-36}{h} = 12$

**2)** $\lim_{h\to 0} \frac{-(h+4)^2+16}{h} = -8$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

**1)** $\lim_{x\to\infty} -9xe^{-x} = 0$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

**1)** $\int (-3x-5)^4\,dx = -\frac{1}{15}(-3x-5)^5 + C$

**2)** $\int (4x+7)^3\,dx = \frac{1}{16}(4x+7)^4 + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

**1)** $\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

**1)** $\int x^4\ln(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5 + C$

**2)** $\int_0^3 x\,e^x\,dx = 2e^3 + 1 \approx 41{,}17$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

**1)** $V = \pi\int_0^3 \left(x^4 - 14x^2 + 49\right)dx = \frac{348}{5}\pi \approx 218{,}65$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** divergent : $-\ln(a) \to \infty$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $(x+3)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$

**2)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, \quad f(-2) = e^2 \approx 7{,}39 \Rightarrow H(-2 \mid 7{,}39)$

**3)** $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 2e^1 \approx 5{,}44 \Rightarrow W(-1 \mid 5{,}44)$

**4)** $A = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-3) = -4 + e^3 \approx 16{,}09$

**Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)**

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |