Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-8}{x^2-4}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{-4x-3}{x^2+1}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{4}{x^2+8x+16}$: Polstelle bei $x = -4$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3x+2}{x+2}$ _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2+x-20}{x+5} =$ _____

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{x}}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int 3\cos(-x - 1)\, dx =$ _____

2) $\int \frac{3}{(3x+3)^2}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int 3x\, e^{-2x^2}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x\, e^{4x}\, dx =$ _____

2) $\int 3x^2\, e^{-x}\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3$ auf $[0; 6]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = \frac{4}{x}$ auf $[5; \infty)$: Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 2) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 1) · e^(–x) und f´´(x) = x · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 3) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-2 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

2) keine Definitionslücken

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = -4$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $+\infty$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5} = -9$

2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 3\cos(-x - 1)\,dx = -3\sin(-x - 1) + C$

2) $\int \dfrac{3}{(3x+3)^2}\,dx = -\dfrac{1}{(3x+3)} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int 3x\,e^{-2x^2}\,dx = -\dfrac{3}{4}e^{-2x^2} + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\,e^{4x}\,dx = \dfrac{1}{4}xe^{4x} - \dfrac{1}{16}e^{4x} + C$

2) $\int 3x^2\,e^{-x}\,dx = (-3x^2 - 6x - 6)\,e^{-x} + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^6 (9)dx = 54\pi \approx 169{,}65$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_5^{\infty} \frac{16}{x^2}\,dx = \frac{16}{5}\pi \approx 10{,}05$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+2)\cdot e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$

2) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1, \quad f(-1) = e^1 \approx 2{,}72 \;\Rightarrow\; H(-1 \mid 2{,}72)$

3) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad f(0) = 2e^0 \approx 2 \;\Rightarrow\; W(0 \mid 2)$

4) $A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = -3 + e^2 \approx 4{,}39$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0