# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-3x+7}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{-2x-8}{x-1}$ : waagerechte Asymptote _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{-2}{x^2-12x+36}$ : Polstelle bei $x = 6$ mit oder ohne VZW? _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3+5x^2-8}{x^2+5}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 4} (3x^2 + x - 3) =$ _____

2) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 1}{x - 1} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int e^{-3x-1}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{4}{3x-3}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int x\,e^{-x^2}\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x\cos(5x)\,dx =$ _____

2) $\int (-3x - 1)\,e^{-x}\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 6$ auf $[0; 2]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx$ _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 2) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 1) · e^(–x) und f´´(x) = x · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 3) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

**1)** Nullstelle von f (1 P.) _____

**2)** Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

**3)** Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

**4)** Fläche zwischen G und der x-Achse für $-2 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 0$

2) $y = -2$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = 6$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 5 + \frac{-5x-33}{x^2+5} \Rightarrow y = x + 5$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x\to 4}\left(3x^2 + x - 3\right) = 49$

2) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3} = 27$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x-1} = 6$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int e^{-3x-1}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x-1} + C$

2) $\int \frac{4}{3x-3}\,dx = \frac{4}{3}\ln|3x-3| + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$

2) $\int(-3x-1)\,e^{-x}\,dx = (3x+4)\,e^{-x} + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^2\left(x^4 - 12x^2 + 36\right)dx = \frac{232}{5}\pi \approx 145{,}77$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $\lim_{a \to 0^+} \left[12\sqrt{x}\right]_a^1 = 12$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $(x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -2$

**2)** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = e^1 \approx 2{,}72 \Rightarrow H(-1 \mid 2{,}72)$

**3)** $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = 2e^0 \approx 2 \Rightarrow W(0 \mid 2)$

**4)** $A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = -3 + e^2 \approx 4{,}39$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |