Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x^2 - 6}{2x^2 - 3}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{-4x^2 - 4x - 7}{-2x^2 + 1}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x}$: Polstelle _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x - 2}{x^2 + 3}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-2)^2 - 4}{h}$ = _____

2) $\lim_{x \to 3} (x^2 + 4x - 6)$ = _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to \infty} (-7 + 5e^{-3x}) =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{4x + 2}\, dx =$ _____

2) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{4x+6}{x^2+3x-8}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x\, e^{2x}\, dx =$ _____

2) $\int_1^{e^2} 3\ln(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3x$ auf $[0; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^{\infty} 9e^{-3x}\, dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 2) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 1) · e^(–x) und f´´(x) = x · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 3) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-2 \leq x \leq 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 2$

2) $y = 2$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-3}{x}$ $(x \neq -2) \Rightarrow x = 0$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 1 + \frac{-9x-5}{x^2+3} \Rightarrow y = x + 1$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-2)^2-4}{h} = -4$

2) $\lim_{x \to 3} (x^2 + 4x - 6) = 15$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to \infty} (-7 + 5e^{-3x}) = -7$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \sqrt{4x+2}\, dx = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+2)^3} + C$

2) $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{4x+6}{x^2+3x-8}\, dx = 2\ln|x^2 + 3x - 8| + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

2) $\int_1^{e^2} 3\ln(x)\, dx = 3(e^2 + 1) \approx 25{,}17$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_0^3 (9x^2) dx = 81\pi \approx 254{,}47$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{9}{3}e^{-3x}\right]_0^b = 3$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+2)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -2$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = e^1 \approx 2{,}72 \Rightarrow H(-1 \mid 2{,}72)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = 2e^0 \approx 2 \Rightarrow W(0 \mid 2)$

4) $A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = -3 + e^2 \approx 4{,}39$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0