Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-5x-4}{-x-3}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+5}$: Nullstellen _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-20}$: Polstelle _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2+6x}{x+5}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} =$ _____

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{5x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \cos(-3x - 6)\, dx =$ _____

2) $\int \sqrt{2x + 3}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{3(\ln x)^5}{x}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int (x + 5)\, e^x\, dx =$ _____

2) $\int -x^2\, e^x\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = x + 1$ auf $[1; 4]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$: konvergent oder divergent? _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 1) · e^(–x). Es gilt f´(x) = –x · e^(–x) und f´´(x) = (x – 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 2) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-1 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 5$

2) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-3}{x-4}\ (x \neq -5) \Rightarrow x = 4$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 1 - \frac{5}{x+5} \Rightarrow y = x + 1$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = 27$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5}$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \cos(-3x - 6)\,dx = -\frac{1}{3}\sin(-3x - 6) + C$

2) $\int \sqrt{2x + 3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x + 3)^3} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{3(\ln x)^5}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^6 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int (x + 5)\,e^x\,dx = (x + 4)\,e^x + C$

2) $\int -x^2\,e^x\,dx = (-x^2 + 2x - 2)\,e^x + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_1^4 (x^2 + 2x + 1)dx = 39\pi \approx 122{,}52$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) divergent : $\ln(b) \to \infty$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x + 1) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = e^0 \approx 1 \Rightarrow H(0 \mid 1)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \Rightarrow W(1 \mid 0{,}74)$

4) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -2 + e^1 \approx 0{,}72$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0