# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-3x-9}{3x-3}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{6x+12}{-x+8}$ : Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$ : Polstelle _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x-2}{x+2}$ _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3} =$ _____

2) $\lim_{x\to-6} \frac{x+6}{x^2-36} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

**1)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x} - e^{-4x}}{x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

**1)** $\int \sqrt{2x + 1}\, dx =$ _____

**2)** $\int 4e^{3x+5}\, dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

**1)** $\int x^2(x^3 - 6)^4\, dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

**1)** $\int x \sin(2x)\, dx =$ _____

**2)** $\int (-x - 2)\, e^x\, dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

**1)** $f(x) = -3x + 5$ auf $[2; 5]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

**1)** $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$ : konvergent oder divergent? _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 80 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 2 · (5 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 80 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

**1)** Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

**2)** Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

**3)** Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

**4)** Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = -1$

2) $f(0) = \frac{3}{2}$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}\ (x \neq 3) \Rightarrow x = -1$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $+\infty$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

2) $\lim_{x \to -6} \frac{x+6}{x^2-36} = -\frac{1}{12}$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x}-e^{-4x}}{x} = 1$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$

2) $\int 4e^{3x+5}\,dx = \frac{4}{3}e^{3x+5} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int x^2(x^3-6)^4\,dx = \frac{1}{15}(x^3-6)^5 + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

2) $\int(-x-2)\,e^x\,dx = (-x-1)\,e^x + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_2^5 (9x^2 - 30x + 25)dx = 111\pi \approx 348{,}72$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** konvergent : 1

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $V(t) = 80 + \int_0^t 2(5 - s)\,ds = 80 + 10t - 1t^2$

**2)** $r(t) = 0 \Rightarrow t = 5\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach – )

**3)** $V(5) = 80 + 50 - 25 = 105\,\text{m}^3$

**4)** $V(t) = 80 \Rightarrow 10t - 1t^2 = 0 \Rightarrow t = 10\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

**Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)**

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |