Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4}{x^2+4}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{-3x+3}{5x-5}$: Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+6x+9}$: Polstelle bei $x = -3$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2+6x-6}{x-4}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -5} \frac{x+5}{x^2-25} =$ _____

2) $\lim_{x \to -6} \frac{x^2+10x+24}{x+6} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{x+1}\, dx =$ _____

2) $\int e^{-2x}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \cos(x) \sin^5(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int 2x^2 e^x\, dx =$ _____

2) $\int x \sin(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x + 5$ auf $[1; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 3) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 2) · e^(–x) und f´´(x) = (x + 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 4) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-3 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) keine Definitionslücken

2) $f(0) = -\frac{3}{5}$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) ohne VZW: $x = -3$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 10 + \frac{34}{x-4} \Rightarrow y = x + 10$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x\to -5} \frac{x+5}{x^2-25} = -\frac{1}{10}$

2) $\lim_{x\to -6} \frac{x^2+10x+24}{x+6} = -2$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \sqrt{x+1}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$

2) $\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \cos(x)\sin^5(x)\, dx = \frac{1}{6}\sin^6(x) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int 2x^2 e^x\, dx = (2x^2 - 4x + 4)\, e^x + C$

2) $\int x\sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_1^3 (x^2 - 10x + 25)dx = \frac{56}{3}\pi \approx 58{,}64$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x + 3) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, \quad f(-2) = e^2 \approx 7{,}39 \Rightarrow H(-2 \mid 7{,}39)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 2e^1 \approx 5{,}44 \Rightarrow W(-1 \mid 5{,}44)$

4) $A = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-3) = -4 + e^3 \approx 16{,}09$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0