# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-4x+5}{2x-1}$ : waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{3}{2x^2+10x}$ : Definitionslücken _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$ : Polstelle _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+5x+5}{x-4}$ _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+3)^2+9}{h} =$ _____

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{-3\ln(x)}{x^2} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-6}{(-3x-4)^2}\,dx =$ _____

2) $\int \sqrt{3x+6}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{4(\ln x)^2}{x}\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^2 e^x\,dx =$ _____

2) $\int x\cos(5x)\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 2x + 2$ auf $[2; 5]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 6 · t · e^(–0,25t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 6 · e^(–0,25t) · (1 – 0,25t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

**1)** Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**2)** Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**4)** Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

**1)** $y = -2$

**2)** $x_1 = -5,\ x_2 = 0$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

**1)** $f(x) = \frac{x-3}{x}\ (x \neq 2) \Rightarrow x = 0$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

**1)** $-\infty$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

**1)** $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+3)^2+9}{h} = -6$

**2)** $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = 12$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

**1)** $\lim_{x \to \infty} \frac{-3\ln(x)}{x^2} = 0$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

**1)** $\int \frac{-6}{(-3x-4)^2}\,dx = -\frac{2}{(-3x-4)} + C$

**2)** $\int \sqrt{3x+6}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+6)^3} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

**1)** $\int \frac{4(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{4}{3}(\ln x)^3 + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

**1)** $\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C$

**2)** $\int x\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

**1)** $V = \pi\int_2^5 (4x^2 + 8x + 4)\,dx = 252\pi \approx 791{,}68$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $\lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^{16} = 8$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $f(1) = 6 \cdot e^{-0{,}25} \approx 4{,}67 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**2)** $f'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0{,}25t = 0 \Rightarrow t = 4\,\text{h}$

**3)** $f(4) = 24 \cdot e^{-1} \approx 8{,}83 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**4)** $f'(t) = 6 \cdot e^{-0{,}25t} \cdot (0{,}0625t - 0{,}5) = 0 \Rightarrow t = 8\,\text{h}$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |