Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-9}{x^2 - 49}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}$: Nullstellen _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x - 10}{x^2 - 3x - 10}$: Polstelle bei $x = 5$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 1} (3x^2 - 6x - 9) =$ _____

2) $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int 2\cos(-2x - 2)\,dx =$ _____

2) $\int 3\sin(-2x - 7)\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-9}\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int -x^2 e^{-x}\,dx =$ _____

2) $\int x\sin(5x)\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3x + 6$ auf $[0; 1]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 8 · t · e^(–0,5t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 8 · e^(–0,5t) · (1 – 0,5t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

1) Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

4) Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -7,\ x_2 = 7$

2) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) mit VZW: $x = 5$ ist einfache Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = 3x + 2 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = 3x + 2$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x\to 1}\left(3x^2 - 6x - 9\right) = -12$

2) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = 1$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 2\cos(-2x-2)\,dx = -\sin(-2x-2) + C$

2) $\int 3\sin(-2x-7)\,dx = \frac{3}{2}\cos(-2x-7) + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-9}\,dx = \ln|x^2 + 3x - 9| + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int -x^2 e^{-x}\,dx = (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x} + C$

2) $\int x\sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^1 \left(9x^2 + 36x + 36\right)dx = 57\pi \approx 179{,}07$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{a \to 0^+} \left[6\sqrt{x}\right]_a^1 = 6$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $f(1) = 8 \cdot e^{-0,5} \approx 4,85 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

2) $f'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0,5t = 0 \Rightarrow t = 2\,\text{h}$

3) $f(2) = 16 \cdot e^{-1} \approx 5,89 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

4) $f'(t) = 8 \cdot e^{-0,5t} \cdot (0,25t - 1) = 0 \Rightarrow t = 4\,\text{h}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0