Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 6}$: Nullstellen _____

2) $f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 6}{2x - 9}$: Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 + 4x - 5}$: Stelle der hebbaren Lücke _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x - 4}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{x - 2} =$ _____

2) $\lim_{x \to 1} (-x^2 + 6x - 6) =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{3x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-1}{(-2x-2)^2}\, dx =$ _____

2) $\int (4x + 7)^4\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{3e^x}{e^x + 4}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x^4 \ln(x)\, dx =$ _____

2) $\int x^2 \ln(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 2x$ auf $[0;\ 4]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^{\infty} 8e^{-4x}\, dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 4 · t · e^(–0,25t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 4 · e^(–0,25t) · (1 – 0,25t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

1) Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

2) Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

4) Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x = -6$

2) $f(0) = -\frac{2}{3}$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$ $(x \neq -5) \Rightarrow x = -5$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = -2x - 2 - \frac{1}{x-4} \Rightarrow y = -2x - 2$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{x-2} = -\infty$

2) $\lim_{x \to 1} \left(-x^2 + 6x - 6\right) = -1$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}-1}{3x} = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-1}{(-2x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{2(-2x-2)} + C$

2) $\int (4x+7)^4\,dx = \frac{1}{20}(4x+7)^5 + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{3e^x}{e^x+4}\,dx = 3\ln(e^x+4) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x^4 \ln(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5 + C$

2) $\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^4 \left(4x^2\right)dx = \frac{256}{3}\pi \approx 268{,}08$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{8}{4}e^{-4x}\right]_0^b = 2$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $f(1) = 4 \cdot e^{-0{,}25} \approx 3{,}12\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

2) $f'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}25t = 0 \;\Rightarrow\; t = 4\,\text{h}$

3) $f(4) = 16 \cdot e^{-1} \approx 5{,}89\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$

4) $f'(t) = 4 \cdot e^{-0{,}25t} \cdot (0{,}0625t - 0{,}5) = 0 \;\Rightarrow\; t = 8\,\text{h}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0