# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4x+3}{x^2-9}$ : Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{-2x-3}{x^2+5x-2}$ : waagerechte Asymptote _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 3} f(x)$ für $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$ _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2-4x+2}{x-4}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} =$ _____

2) $\lim_{x \to 3} (-3x^2 + 3x + 5) =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

**1)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-4x} - 1}{x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

**1)** $\int 6\cos(3x - 2)\,dx =$ _____

**2)** $\int 4\sin(3x - 1)\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

**1)** $\int 3x\, e^{3x^2}\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

**1)** $\int x\, e^{3x}\,dx =$ _____

**2)** $\int x\ln(x)\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

**1)** $f(x) = 1$ auf $[0; 8]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

**1)** $\int_0^{\infty} 3e^{-x}\,dx$ _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In einem Speicher sind zu Beginn (t = 0) 100 m³ Wasser. Die Änderungsrate des Wasservolumens beträgt r(t) = 2 · (5 – t) in m³ pro Stunde (t in Stunden). Positive Werte bedeuten Zufluss, negative Abfluss. Tipp: Das Volumen ist der Anfangsbestand plus die Integralfunktion der Rate: V(t) = 100 + ?0t r(s) ds. Am meisten Wasser ist im Speicher, wenn die Rate von positiv zu negativ wechselt.

**1)** Gib das Volumen $V(t)$ als Term an. (3 P.) _____

**2)** Zu welchem Zeitpunkt ist am meisten Wasser im Speicher? (2 P.) _____

**3)** Wie viel Wasser ist dann im Speicher? (3 P.) _____

**4)** Wann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie am Anfang? (2 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$

2) $y = 0$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x-2} = 3$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + \frac{2}{x-4} \Rightarrow y = x$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} = 7$

2) $\lim_{x \to 3} \left(-3x^2 + 3x + 5\right) = -13$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-4x}-1}{x} = -4$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 6\cos(3x-2)\,dx = 2\sin(3x-2) + C$

2) $\int 4\sin(3x-1)\,dx = -\frac{4}{3}\cos(3x-1) + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int 3x\,e^{3x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{3x^2} + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\,e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

2) $\int x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^8 (1)dx = 8\pi \approx 25{,}13$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{3}{1}e^{-x}\right]_0^b = 3$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $V(t) = 100 + \int_0^t 2(5-s)\,ds = 100 + 10t - 1t^2$

**2)** $r(t) = 0 \Rightarrow t = 5\,\text{h}$ (Vorzeichenwechsel von + nach –)

**3)** $V(5) = 100 + 50 - 25 = 125\,\text{m}^3$

**4)** $V(t) = 100 \Rightarrow 10t - 1t^2 = 0 \Rightarrow t = 10\,\text{h}$ ($t = 0$ ist der Anfang)

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |