Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 4}$: Nullstellen _____

2) $f(x) = \frac{-3x + 8}{x^2 + 5x + 1}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 1} f(x)$ für $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 5}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -2} (-3x^2 - 7) =$ _____

2) $\lim_{h \to 0} \frac{2(h + 6)^2 - 72}{h} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{x + 5}\, dx =$ _____

2) $\int 4\sin(4x + 6)\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{6x - 3}{x^2 - x - 3}\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x\cos(5x)\, dx =$ _____

2) $\int 3\ln(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 2$ auf [0; 3] _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$: konvergent oder divergent? _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 3) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 2) · e^(–x) und f´´(x) = (x + 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 4) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-3 \leq x \leq 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

2) $y = 0$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-4}{x-5} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 4 + \frac{-5x-3}{x^2+1} \Rightarrow y = x + 4$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -2} \left(-3x^2 - 7\right) = -19$

2) $\lim_{h \to 0} \frac{2(h+6)^2 - 72}{h} = 24$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x} = \frac{2}{3}$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \sqrt{x+5}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} + C$

2) $\int 4\sin(4x+6)\, dx = -\cos(4x+6) + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{6x-3}{x^2-x-3}\, dx = 3\ln|x^2 - x - 3| + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\cos(5x)\, dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$

2) $\int 3\ln(x)\, dx = 3(x\ln(x) - x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^3 \left(x^4 - 4x^2 + 4\right)dx = \frac{123}{5}\pi \approx 77{,}28$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) divergent : $-\ln(a) \to \infty$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+3)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, \quad f(-2) = e^2 \approx 7{,}39 \Rightarrow H(-2 \mid 7{,}39)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 2e^1 \approx 5{,}44 \Rightarrow W(-1 \mid 5{,}44)$

4) $A = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-3) = -4 + e^3 \approx 16{,}09$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0