Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$: Nullstellen _____

2) $f(x) = \frac{3}{x^2+6}$: Definitionslücken _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 4^+} \frac{8}{x-4}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-5x^2-x-7}{-3x^2-4x+5}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-11x+30}{x-5} =$ _____

2) $\lim_{x \to 6} \frac{x^2-9x+18}{x-6} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln(x) =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \cos(5x + 5)\, dx =$ _____

2) $\int (-x + 2)^3\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \sin(x) \cos^5(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int_0^4 x\, e^x\, dx =$ _____

2) $\int x^3 \ln(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x^2 + 7$ auf [0; 1] _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^9 \frac{6}{\sqrt{x}}\, dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt r(t) = t · (8 – t) für 0 <= t <= 8 (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 2 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 8 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$

2) keine Definitionslücken

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $+\infty$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $y = \frac{5}{3}$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5} = -1$

2) $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6} = 3$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln(x) = 0$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \cos(5x + 5)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x + 5) + C$

2) $\int (-x + 2)^3\,dx = -\frac{1}{4}(-x + 2)^4 + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \sin(x)\cos^5(x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos^6(x) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int_0^4 x\,e^x\,dx = 3e^4 + 1 \approx 164{,}79$

2) $\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_0^1 \left(x^4 - 14x^2 + 49\right)dx = \frac{668}{15}\pi \approx 139{,}91$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{a \to 0^+} \left[12\sqrt{x}\right]_a^9 = 36$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $r(2) = 12 \frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = (8 - 2t) = 0 \Rightarrow t = 4\,\text{min}$

3) $r(4) = 16 \frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^8 r(t)\,dt = \left[8\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^8 = 85{,}33\,\text{l}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0