# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{4}{x^2+6}$ : Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{x-4}$ : Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2-x-20}{x^2-6x+5}$ : Polstelle _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{2x^2-5x+8}{x-2}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{h\to 0} \frac{(h-6)^2-36}{h} =$ _____

2) $\lim_{x\to 2} (3x^2 + 5x - 5) =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

**1)** $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

**1)** $\int 6\sin(4x + 4)\,dx =$ _____

**2)** $\int 4e^{2x+6}\,dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

**1)** $\int \frac{2e^x}{e^x + 6}\,dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

**1)** $\int 2\ln(x)\,dx =$ _____

**2)** $\int (-5x + 6)\,e^x\,dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

**1)** $f(x) = -x^2 + 3$ auf $[0; 2]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

**1)** $f(x) = \frac{4}{x}$ auf $[2; \infty)$ : Volumen _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt r(t) = 2 · t · (10 – t) für 0 <= t <= 10 (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

**1)** Wie groß ist die Zuflussrate nach 4 Minuten? (2 P.) _____

**2)** Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

**4)** Wie viele Liter sind nach 10 Minuten im Becken? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) keine Definitionslücken

2) $f(0) = -1$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ $(x \neq 5) \Rightarrow x = 1$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x-2} \Rightarrow y = 2x - 1$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{h \to 0} \frac{(h-6)^2 - 36}{h} = -12$

2) $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 5x - 5) = 17$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x} = 3$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 6\sin(4x + 4)\,dx = -\frac{3}{2}\cos(4x + 4) + C$

2) $\int 4e^{2x+6}\,dx = 2e^{2x+6} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{2e^x}{e^x + 6}\,dx = 2\ln(e^x + 6) + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int 2\ln(x)\,dx = 2(x\ln(x) - x) + C$

2) $\int (-5x + 6)\,e^x\,dx = (-5x + 11)\,e^x + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_0^2 (x^4 - 6x^2 + 9)\,dx = \frac{42}{5}\pi \approx 26{,}39$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** $V = \pi\int_2^{\infty} \frac{16}{x^2}\,dx = 8\pi \approx 25{,}13$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $r(4) = 48\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

**2)** $r'(t) = 2 \cdot (10 - 2t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 5\,\text{min}$

**3)** $r(5) = 50\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

**4)** $\int_0^{10} r(t)\,dt = 2 \cdot \left[10\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 333{,}33\,\text{l}$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |