Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{6}{3x^2 - 15x}$: Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$: Nullstellen _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$: Polstelle _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 6}{x^2 + 5}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} =$ _____

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{-6}{x - 6} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to \infty} 6x^5 e^{-x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int 3e^{-x}\,dx =$ _____

2) $\int \frac{-2}{-2x+5}\,dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int x^2(x^3 - 5)^3\,dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int x\cos(5x)\,dx =$ _____

2) $\int_0^2 3x\,e^x\,dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = x + 4$ auf $[2; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = 3e^{-5x}$ auf $[0; \infty)$: Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 1) · e^(–x). Es gilt f´(x) = –x · e^(–x) und f´´(x) = (x – 1) · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 2) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-1 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 5$

2) $x = -3$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $f(x) = \frac{x}{x-2}\ (x \neq -2) \Rightarrow x = 2$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x + 5 + \frac{-4x-19}{x^2+5} \Rightarrow y = x + 5$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-5x+4}{x-4} = 3$

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{-6}{x-6} = +\infty$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to \infty} 6x^5 e^{-x} = 0$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int 3e^{-x}\,dx = -3e^{-x} + C$

2) $\int \frac{-2}{-2x+5}\,dx = \ln|-2x+5| + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int x^2(x^3-5)^3\,dx = \frac{1}{12}(x^3-5)^4 + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int x\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$

2) $\int_0^2 3x\,e^x\,dx = 3(e^2+1) \approx 25{,}17$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_2^3 (x^2 + 8x + 16)dx = \frac{127}{3}\pi \approx 132{,}99$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_0^{\infty} 9e^{-10x}\,dx = \frac{9}{10}\pi \approx 2{,}83$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+1)\cdot e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$

2) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad f(0) = e^0 \approx 1 \;\Rightarrow\; H(0 \mid 1)$

3) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74 \;\Rightarrow\; W(1 \mid 0{,}74)$

4) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -2 + e^1 \approx 0{,}72$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0