# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+3}$ : Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{3x^2+x+7}{-x-1}$ : Schnittpunkt mit der y-Achse (f(0)) _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{-5}{x^2+2x+1}$ : Polstelle bei $x = -1$ mit oder ohne VZW? _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+2}{x^2+3}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+5x+6}{x+3} =$ _____

2) $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+1)^2+1}{h} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to \infty} -4x^5 e^{-x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{3x + 3}\, dx =$ _____

2) $\int 4\cos(-x - 7)\, dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int 6x\,(x^2 - 5)^5\, dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int 5\ln(x)\, dx =$ _____

2) $\int x \sin(2x)\, dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 2x^2$ auf [0; 1] _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ : konvergent oder divergent? _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 6 · t · e^(–0,5t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 6 · e^(–0,5t) · (1 – 0,5t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

**1)** Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**2)** Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**4)** Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

**1)** keine Definitionslücken

**2)** $f(0) = -7$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

**1)** ohne VZW: $x = -1$ ist doppelte Nullstelle des Nenners

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

**1)** $f(x) = x + 3 + \frac{-x-7}{x^2+3} \Rightarrow y = x + 3$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

**1)** $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+5x+6}{x+3} = -1$

**2)** $\lim_{h \to 0} \frac{-(h+1)^2+1}{h} = -2$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

**1)** $\lim_{x \to \infty} -4x^5 e^{-x} = 0$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

**1)** $\int \sqrt{3x+3}\, dx = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+3)^3} + C$

**2)** $\int 4\cos(-x-7)\, dx = -4\sin(-x-7) + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

**1)** $\int 6x\,(x^2-5)^5\, dx = \frac{1}{2}(x^2-5)^6 + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

**1)** $\int 5\ln(x)\, dx = 5(x\ln(x) - x) + C$

**2)** $\int x\sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

**1)** $V = \pi\int_0^1 (4x^4)dx = \frac{4}{5}\pi \approx 2{,}51$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** divergent : $-\ln(a) \to \infty$

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $f(1) = 6 \cdot e^{-0,5} \approx 3,64 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**2)** $f'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0,5t = 0 \Rightarrow t = 2\,\text{h}$

**3)** $f(2) = 12 \cdot e^{-1} \approx 4,41 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**4)** $f'(t) = 6 \cdot e^{-0,5t} \cdot (0,25t - 1) = 0 \Rightarrow t = 4\,\text{h}$

### Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |