Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7}$: Nullstellen _____

2) $f(x) = \frac{-6x + 1}{x - 5}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $\lim_{x \to 1} f(x)$ für $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1}$: schiefe Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -6} \frac{x^2 + 8x + 12}{x + 6} =$ _____

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0^+} 3x^4 \ln(x) =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \frac{-6}{(x+6)^2}\, dx =$ _____

2) $\int 6e^{-3x-2}\, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \sin(x) \cos^4(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int (2x)\, e^{-x}\, dx =$ _____

2) $\int x^5 \ln(x)\, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = -x + 5$ auf $[1; 3]$ _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^5}\, dx$ _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Gegeben ist f(x) = (x + 2) · e^(–x). Es gilt f´(x) = (–x – 1) · e^(–x) und f´´(x) = x · e^(–x). Eine Stammfunktion ist F(x) = –(x + 3) · e^(–x). Tipp: e^(–x) ist nie 0 – eine Gleichung wie (…) · e^(–x) = 0 löst Du, indem Du nur die Klammer gleich 0 setzt.

1) Nullstelle von f (1 P.) _____

2) Hochpunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

3) Wendepunkt (y-Wert auf 2 Stellen runden) (3 P.) _____

4) Fläche zwischen G und der x-Achse für $-2 \le x \le 0$ (2 Stellen) (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $x = -7$

2) $y = -6$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $f(x) = x - 2 - \frac{3}{x-1} \Rightarrow y = x - 2$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -6} \frac{x^2+8x+12}{x+6} = -4$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0^+} 3x^4 \ln(x) = 0$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int \frac{-6}{(x+6)^2}\,dx = \frac{6}{(x+6)} + C$

2) $\int 6e^{-3x-2}\,dx = -2e^{-3x-2} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \sin(x)\cos^4(x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int (2x)\,e^{-x}\,dx = (-2x-2)\,e^{-x} + C$

2) $\int x^5 \ln(x)\,dx = \frac{1}{6}x^6\ln(x) - \frac{1}{36}x^6 + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi\int_1^3 (x^2 - 10x + 25)\,dx = \frac{56}{3}\pi \approx 58{,}64$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{4x^4}\right]_1^b = \frac{1}{2}$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $(x+2)\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -2$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = e^1 \approx 2{,}72 \Rightarrow H(-1 \mid 2{,}72)$

3) $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f(0) = 2e^0 \approx 2 \Rightarrow W(0 \mid 2)$

4) $A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = -3 + e^2 \approx 4{,}39$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0