# Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-6}{x^2 - x - 2}$ : Definitionslücken _____

2) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 8}{3x^2 - 2}$ : waagerechte Asymptote _____

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x}$ : Polstelle _____

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 6}$ : schiefe Asymptote _____

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$ _____

2) $\lim_{x \to -4} \frac{x + 4}{x^2 - 16} =$ _____

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} =$ _____

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int \sqrt{x + 3}\, dx =$ _____

2) $\int 4e^{2x}\, dx =$ _____

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int x^2 (x^3 + 4)^4\, dx =$ _____

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int (3x + 5)\, e^x\, dx =$ _____

2) $\int x^3 \ln(x)\, dx =$ _____

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3x + 3$ auf $[1; 3]$ _____

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ : konvergent oder divergent? _____

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

Ein Patient nimmt eine Tablette. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut (in mg pro Liter) beschreibt f(t) = 4 · t · e^(–0,25t), t in Stunden nach der Einnahme. Die Ableitung ist f´(t) = 4 · e^(–0,25t) · (1 – 0,25t). Tipp: Wo die Konzentration am stärksten abnimmt, hat der Graph seinen Wendepunkt (f´´(t) = 0).

**1)** Konzentration nach 1 Stunde (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**2)** Nach wie vielen Stunden ist die Konzentration am größten? (3 P.) _____

**3)** Wie groß ist die höchste Konzentration? (auf 2 Stellen runden) (2 P.) _____

**4)** Wann nimmt die Konzentration am stärksten ab? (3 P.) _____

# Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

## Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

**1)** $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

**2)** $y = \frac{2}{3}$

## Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

**1)** $f(x) = \frac{x-1}{x-3}\ (x \neq 0) \Rightarrow x = 3$

## Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

**1)** $f(x) = x - 5 + \frac{-4x+33}{x^2+6} \Rightarrow y = x - 5$

## Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

**1)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$

**2)** $\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2-16} = -\frac{1}{8}$

## Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

**1)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 1$

## Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

**1)** $\int \sqrt{x+3}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + C$

**2)** $\int 4e^{2x}\,dx = 2e^{2x} + C$

## Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

**1)** $\int x^2(x^3+4)^4\,dx = \frac{1}{15}(x^3+4)^5 + C$

## Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

**1)** $\int (3x+5)\,e^x\,dx = (3x+2)\,e^x + C$

**2)** $\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

## Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

**1)** $V = \pi\int_1^3 (9x^2 + 18x + 9)dx = 168\pi \approx 527{,}79$

## Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

**1)** konvergent : 2

## Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

**1)** $f(1) = 4 \cdot e^{-0,25} \approx 3,12 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**2)** $f'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0,25t = 0 \Rightarrow t = 4\,\text{h}$

**3)** $f(4) = 16 \cdot e^{-1} \approx 5,89 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$

**4)** $f'(t) = 4 \cdot e^{-0,25t} \cdot (0,0625t - 0,5) = 0 \Rightarrow t = 8\,\text{h}$

**Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)**

| 15 P. | 14 P. | 13 P. | 12 P. | 11 P. | 10 P. | 9 P. | 8 P. | 7 P. | 6 P. | 5 P. | 4 P. | 3 P. | 2 P. | 1 P. | 0 P. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ab 48 | ab 45 | ab 43 | ab 40 | ab 38 | ab 35 | ab 33 | ab 30 | ab 28 | ab 25 | ab 23 | ab 20 | ab 17 | ab 14 | ab 10 | ab 0 |