Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Name: _____ Datum: _____

Bearbeitungszeit: 90 Minuten Punkte: _____ von 50 Note: ____

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

Bestimme das Gefragte: Definitionslücken (Nenner = 0), Nullstellen (Zähler = 0, aber nur im Definitionsbereich), waagerechte Asymptote (Grade vergleichen) oder f(0).

1) $f(x) = \frac{-4x-6}{3x^2-3x-9}$: waagerechte Asymptote _____

2) $f(x) = \frac{2x^2+3x+8}{4x^2+2}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

Faktorisiere Zähler und Nenner. Kürzt sich ein Faktor (x – a) heraus, ist x = a eine hebbare Lücke, sonst eine Polstelle. Doppelte Nullstelle des Nenners: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

1) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-11x+18}$: Polstelle bei $x = 2$ mit oder ohne VZW? _____

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

Zählergrad = Nennergrad + 1: Polynomdivision, der ganzrationale Teil ist die schiefe Asymptote. Gleicher Grad: Quotient der Leitkoeffizienten. Sonst Vorzeichen der höchsten Potenzen betrachten.

1) $f(x) = \frac{-5x^2-2x-7}{2x^2-x+6}$: waagerechte Asymptote _____

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

Berechne die Grenzwerte an der Stelle x0. Erst einsetzen – kommt 0/0 heraus, faktorisieren und kürzen. Bei Polstellen auf die Seite (+ oder –) achten.

1) $\lim_{x \to -5} \frac{x^3+125}{x+5} =$ _____

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{7}{x-6} =$ _____

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

Berechne die Grenzwerte. Merke: Die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz, der Logarithmus langsamer. Bei 0/0 hilft die Regel von L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} =$ _____

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

Bestimme eine Stammfunktion (lineare Substitution): Integriere die äußere Funktion und teile durch die innere Ableitung, also durch die Zahl vor x. Kontrolle durch Ableiten.

1) $\int (2x - 1)^3 \, dx =$ _____

2) $\int 2e^{-x+1} \, dx =$ _____

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit Substitution: Setze u = innere Funktion. Steht deren Ableitung (bis auf einen Faktor) als Faktor davor, wird das Integral einfach.

1) $\int \frac{2e^x}{e^x + 9} \, dx =$ _____

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

Bestimme eine Stammfunktion mit partieller Integration: ? u · v´ dx = u · v – ? u´ · v dx. Wähle u so, dass es beim Ableiten einfacher wird (x, ln x).

1) $\int_1^e 3\ln(x) \, dx =$ _____

2) $\int x \sin(x) \, dx =$ _____

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

Der Graph von f rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechne das Volumen V = pi · ? f(x)² dx exakt (mit pi) und gerundet.

1) $f(x) = 3x^2$ auf [0; 2] _____

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

Berechne die uneigentlichen Integrale bzw. Volumen: erst mit einer Grenze b rechnen, dann b -> unendlich (bzw. a -> 0) laufen lassen.

1) $f(x) = e^{-4x}$ auf [0; ∞) : Volumen _____

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

In ein leeres Becken läuft Wasser. Die Zuflussrate in Litern pro Minute beträgt r(t) = 2 · t · (10 – t) für 0 <= t <= 10 (t in Minuten). Danach wird der Zufluss geschlossen. Tipp: Die Zuflussrate sagt, wie schnell Wasser kommt. Wie viel Wasser insgesamt gekommen ist, liefert das Integral.

1) Wie groß ist die Zuflussrate nach 4 Minuten? (2 P.) _____

2) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser zu? (3 P.) _____

3) Wie groß ist die größte Zuflussrate? (2 P.) _____

4) Wie viele Liter sind nach 10 Minuten im Becken? (3 P.) _____

Lösungen: Probe-Klausur Gebrochenrationale Funktionen und Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Definitionslücken und Nullstellen (je 3 P.)

1) $y = 0$

2) $y = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2: Polstelle oder hebbare Lücke (3 P.)

1) mit VZW: $x = 2$ ist einfache Nullstelle des Nenners

Aufgabe 3: Asymptoten (3 P.)

1) $y = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

Aufgabe 4: Grenzwerte (je 2 P.)

1) $\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5} = 75$

2) $\lim_{x \to 6^-} \frac{7}{x - 6} = -\infty$

Aufgabe 5: Grenzwerte mit e und ln (2 P.)

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$

Aufgabe 6: Lineare Substitution (je 2 P.)

1) $\int (2x - 1)^3 \, dx = \frac{1}{8}(2x - 1)^4 + C$

2) $\int 2e^{-x+1} \, dx = -2e^{-x+1} + C$

Aufgabe 7: Substitution (3 P.)

1) $\int \frac{2e^x}{e^x + 9} \, dx = 2\ln(e^x + 9) + C$

Aufgabe 8: Partielle Integration (je 4 P.)

1) $\int_1^e 3\ln(x) \, dx = 3$

2) $\int x \sin(x) \, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

Aufgabe 9: Rotationskörper (4 P.)

1) $V = \pi \int_0^2 (9x^4) dx = \frac{288}{5}\pi \approx 180{,}96$

Aufgabe 10: Uneigentliches Integral (3 P.)

1) $V = \pi\int_0^{\infty} e^{-8x}\,dx = \frac{1}{8}\pi \approx 0{,}39$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgabe (10 P.)

1) $r(4) = 48\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

2) $r'(t) = 2 \cdot (10 - 2t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 5\,\text{min}$

3) $r(5) = 50\,\frac{\text{l}}{\text{min}}$

4) $\int_0^{10} r(t)\,dt = 2 \cdot \left[10\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 333{,}33\,\text{l}$

Notenschlüssel (Vorschlag – Deine Schule kann andere Grenzen haben)

15 P.	14 P.	13 P.	12 P.	11 P.	10 P.	9 P.	8 P.	7 P.	6 P.	5 P.	4 P.	3 P.	2 P.	1 P.	0 P.
ab 48	ab 45	ab 43	ab 40	ab 38	ab 35	ab 33	ab 30	ab 28	ab 25	ab 23	ab 20	ab 17	ab 14	ab 10	ab 0